

ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS EN ECOLOGÍA

Yury Paola Balaguera Cala

Carlos Alejandro Berdugo Dueñas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD SECCIONAL DUITAMA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

2016

ALGUNOS MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS EN ECOLOGÍA

Autores: Yury Paola Balaguera Cala

Carlos Alejandro Berdugo Dueñas

Director: Alexis Favián Malpica Vega

PROYECTO DE GRADO EN LA MODALIDAD:
MONOGRAFÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD SECCIONAL DUITAMA
ESCUELA DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

2016

Nota de aceptación

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

Dedicatoria

*A nuestra hija Selene,
por iluminar cada uno de nuestros días,
siendo el amor y fortaleza
para nuestros proyectos de vida.*

Agradecimientos

A todas aquellas personas que hicieron posible que este trabajo se culminara con éxito. En primer lugar a mi Tutor Alexis Malpica, Maestro y Amigo; quien con sus consejos, comentarios hicieron posible el desarrollo de este proyecto.

A mi mamá y mi tío, quienes con su apoyo, comprensión y compañía incondicional, fueron mi respaldo.

A mi pequeña Selene, por haber llegado en el momento justo para iluminar mi vida, inspirando cada uno de mis pasos.

A las personas que hacen parte de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística, por el apoyo en el desarrollo de este trabajo; y a la UPTC por haber abierto sus puertas para realizar mi mayor proyecto de vida.

Muchas gracias a todos, que Dios los bendiga.

Yury Paola Balaguera Cala

A mi tutor Alexis Malpica, por haberme brindado su apoyo para realizar este trabajo.

A mis padres y hermana, quienes con su apoyo incondicional, fueron mi inspiración y parte fundamental de mi vida.

A mi hija Selene por ser el motor de mi vida y la luz de mi inspiración.

A todos aquellos que hicieron parte de mi proceso como integrante de la universidad.

Finalmente a Dios por haberme dado fuerza y valor para cumplir esta etapa de mi vida.

Carlos Alejandro Berdugo Dueñas

Índice general

Lista de símbolos	IX
Introducción	XI
Objetivos	XIII
0.1. Objetivo general	XIII
0.2. Objetivos específicos	XIII
1. Preliminares	1
1.1. Construcción de modelos matemáticos	1
1.2. Campos direccionales	2
1.3. Ecuaciones separables	2
1.4. Plano fase: Sistemas lineales	3
1.5. Estabilidad e inestabilidad	12
1.6. Matriz Jacobiana	12
2. Algunos modelos matemáticos aplicados en ecología	15
2.1. Competencia de Especies	15
2.2. Modelo depredador presa	63
2.3. Modelo Competencia de Especies: La Ballena Azul y la Ballena de Aleta	77
2.3.1. Caso 1	82
2.3.2. Caso 2	88
3. Conclusiones	95
Bibliografía	96

Lista de símbolos

c, d, cte	Constantes Arbitrarias.
$\frac{d}{dx}$	Derivada con Respecto a “ x ”.
$\frac{d}{dy}$	Derivada con Respecto a “ y ”.
\det	Determinante de la Matriz.
f	Función.
\ln	Logaritmo Natural.
$\ x\ $	Longitud o Magnitud del vector.
\mathbf{I}	Matriz Identidad.
\mathbb{R}	Números Reales.
r	Valor Propio.
ξ	Vector Propio.

Introducción

Los modelos matemáticos son la descripción de un fenómeno de la vida real, no son buenos ni malos, simplemente tienen que cumplir ciertos procesos como conceptos básicos para su construcción; simplificando la realidad lo suficiente, para suministrar soluciones valiosas. Dentro de esos procesos esta identificar las variables independientes y dependientes, eligiendo las unidades de medición para cada variable, para enunciar con claridad el principio básico que rige el problema y así poderlo expresar en términos de las variables, asegurándonos de que cada término de la ecuación tiene las mismas unidades físicas.

La ecología estudia la relación que se da entre seres vivos y el medio ambiente, como poblaciones interactuantes en un área particular. Para el trabajo de grado se desea ver el comportamiento de dos especies animales “x” y “y” asociados al equilibrio que mantiene el ecosistema.

En la realización del presente trabajo se ha tomado como texto guía [2]. El trabajo no representa una investigación ni es novedoso, solo aporta el estudio de los modelos para afianzar conocimientos de interés vistos durante el pregrado en cursos como Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, logrando así que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC puedan acceder de manera eficaz a dichos temas.

La estructura del proyecto viene dada de la siguiente manera: un capítulo correspondiente a preliminares, donde se nombran algunos recursos que se tienen para el desarrollo del trabajo, seguido del estudio de los modelos de interacción;

competencia de especies y depredador-presa.

Objetivos

0.1. Objetivo general

Realizar un estudio básico de las ecuaciones diferenciales no lineales y su estabilidad, en los modelos matemáticos ecológicos “Depredador-Presa o Sistema Lotka-Volterra” y “Competencia de Especies”.

0.2. Objetivos específicos

1. Interpretar y analizar geométricamente soluciones a ecuaciones no lineales por medio del plano fase.
2. Analizar el concepto y la aplicación de estabilidad en ecuaciones diferenciales no lineales y modelos ecológicos.
3. Realizar una exploración de los modelo “Depredador-Presa” y “Competencia de Especies”.
4. Solucionar algunos problemas relacionados con las modelos de “Depredador-Presa” y “Competencia de Especies”.
5. Elaborar un documento que muestre el desarrollo del trabajo y evidencie los procesos matemáticos desarrollados.

Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo se puede encontrar un repaso a los principales temas utilizados en gran parte para mostrar la construcción de los modelos matemáticos, en este caso en ecología.

1.1. Construcción de modelos matemáticos

La construcción de un modelo matemático puede seguir algunos pasos que a menudo constituyen parte del proceso.

- I.** Identificar las variables independiente y dependiente.
- II.** Elegir las unidades de medición para cada variable.
- III.** Enunciar con claridad el principio básico que se encuentra detrás o rige al problema que se investiga.
- IV.** Expresar el principio o ley del paso tres en términos de las variables que se eligieron en el paso uno.
- V.** Asegurarse de que cada término de la ecuación tiene las mismas unidades físicas.

1.2. Campos direccionales

Los campos direccionales son valiosas herramientas para estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1.1)$$

donde f es una función dada de las dos variables t y y , que recibe el nombre de función razón de cambio para ecuaciones de la forma (1.1). Es posible construir un campo direccional útil evaluando f en cada punto de una malla rectangular consistente en cuanto menos unos cientos de puntos. Luego, en cada punto de la malla se traza un segmento de recta corto cuya pendiente es el valor de f en ese punto. Entonces cada segmento es tangente a la gráfica de la solución que pasa por ese punto.

Un campo direccional trazado sobre una malla más o menos fina da una buena idea del comportamiento general de las soluciones de una ecuación diferencial.

1.3. Ecuaciones separables

La ecuación general de primer orden es

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (1.2)$$

si la ecuación (1.2) es no lineal, entonces no hay un método universalmente aplicable para resolverla. Se considerará una subclase de ecuaciones de primer orden que pueden resolverse por integración directa.

Para identificar la clase de las ecuaciones, primero se reescribe la ecuación (1.2) en la forma

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.3)$$

Siempre es posible realizar lo anterior haciendo $M(x, y) = -f(x, y)$ y $N(x, y) = 1$, pero también puede haber otras maneras de hacerlo. Si resulta que M es una función

sólo de x , y N es una función sólo de y , entonces la ecuación (1.3) se transforma en

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.4)$$

Se dice que tal ecuación es separable, porque si se escribe en la forma diferencial

$$M(x) dx + N(y) dy = 0, \quad (1.5)$$

es posible separar a través del signo de igualdad, los términos que incluyen a cada variable. La forma diferencial (1.5) es, asimismo, más simétrica y tiende a hacer menos tajante la distinción entre las variables independiente y dependiente.

Una ecuación separable puede resolverse integrando las funciones M y N .

1.4. Plano fase: Sistemas lineales

Dado que muchas ecuaciones diferenciales no pueden resolverse de manera conveniente por métodos analíticos, es importante considerar qué información cualitativa puede obtenerse acerca de sus soluciones sin resolver en realidad las ecuaciones.

$$\frac{dy}{dt} = f(y). \quad (1.6)$$

Se considera el sistema más simple, a saber, un sistema homogéneo de segundo orden con coeficientes constantes. Tal sistema es de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1.7)$$

donde \mathbf{A} es una matriz constante 2×2 y \mathbf{x} es un vector 2×1 . Buscando soluciones de la forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, entonces sustituyendo \mathbf{x} en la ecuación (1.7) se encuentra que

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}, \quad (1.8)$$

y los valores propios se determinan a partir de la ecuación (1.8) hasta una constante multiplicativa arbitraria. Se encuentra que los puntos en los cuales el segundo miembro de la ecuación (1.6) es cero revisten especial importancia.

Tales puntos corresponden a soluciones constantes, o soluciones de equilibrio, de la ecuación (1.6) y a menudo se denominan puntos críticos.

De modo similar, para el sistema (1.7) los puntos en que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ corresponden a soluciones de equilibrio (constantes) y una vez más se les llama puntos críticos. Se supondrá, por tanto, que \mathbf{A} es no singular, o que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Se sigue que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es el único punto crítico del sistema (1.7).

Una solución de la ecuación (1.7) es una función vectorial $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ que satisface la ecuación diferencial. Tal función puede concebirse como la representación paramétrica de una curva en el plano x_1x_2 . A menudo es útil considerar a esta curva como la trayectoria recorrida por una partícula en movimiento cuya velocidad $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ está especificada por la ecuación diferencial. El plano x_1x_2 en sí se denomina el plano de fase y un conjunto representativo de trayectorias recibe el nombre de retrato fase.

Caso 1. Valores propios reales distintos del mismo signo

La solución general de la ecuación (1.7) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (1.9)$$

donde r_1 y r_2 son ambos positivos o ambos negativos.

El punto crítico se conoce como nodo (o fuente nodal).

Ejemplo 1.1 *Para el sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

Los valores y vectores propios son,

$$\begin{array}{ll} \text{Valores} & r_1 = 2 \quad r_2 = 4 \\ \text{Vectores} & \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Su gráfica es:

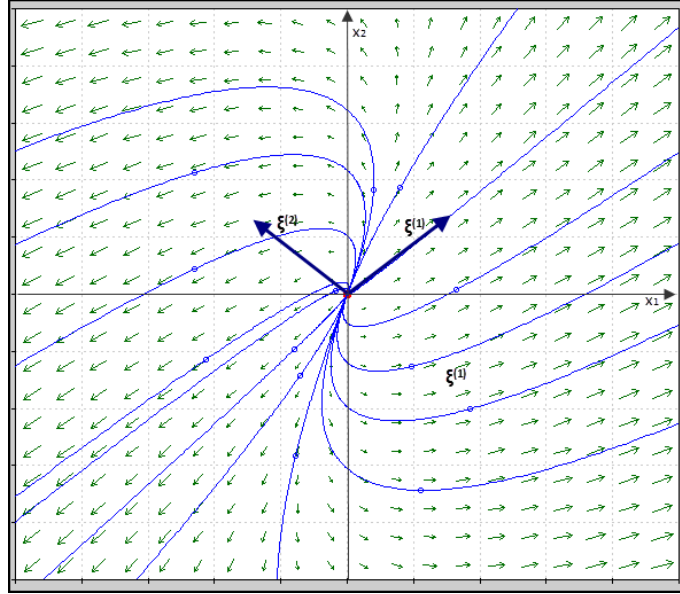


Figura 1.4.1 Plano fase con nodo; $r_1 < r_2 < 0$.

Caso 2. Valores propios reales con signos opuestos

La solución general de la ecuación (1.7) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (1.10)$$

donde $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$.

El origen se denomina punto silla.

Ejemplo 1.2 Para el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

sus valores y vectores propios son,

$$\begin{array}{ll} \text{Valores} & r_1 = -1 \quad r_2 = 2 \\ \text{Vectores} & \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Se visualiza con la gráfica:

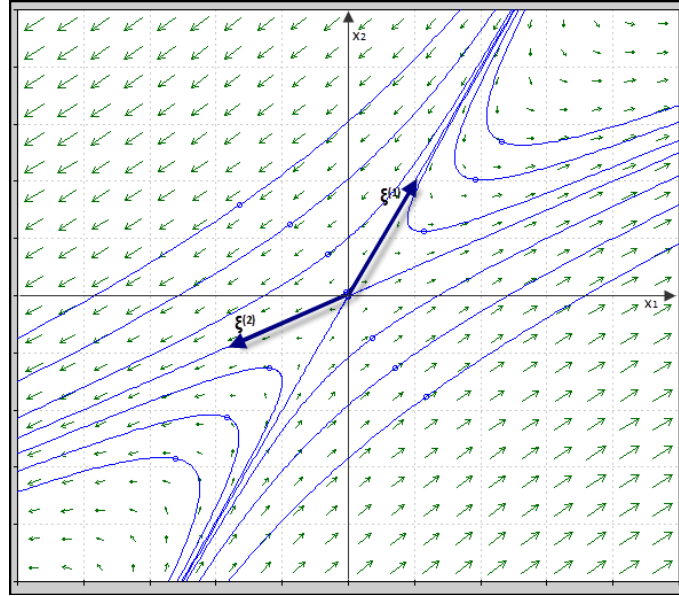


Figura 1.4.2 Plano fase con punto silla; $r_1 > 0$,
 $r_2 < 0$.

Caso 3. Valores propios iguales.

Se supone ahora que $r_1 = r_2 = r$. Se considera el caso en que los valores propios son negativos; si son positivos, las trayectorias son similares pero el movimiento se invierte. Existen dos subcasos, dependiendo de si el valor propio repetido tiene dos vectores propios independientes o sólo uno.

a. Dos vectores propios independientes

La solución general de la ecuación (1.7) es

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{rt} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{rt},$$

donde $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ son los vectores propios independientes. El cociente $\frac{x_2}{x_1}$ es independiente de t , pero depende de las componentes de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ y $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ y de las constantes arbitrarias c_1 y c_2 . Así, todas las trayectorias se encuentran en una recta que pasa

por el origen, el punto crítico recibe el nombre de nodo propio y a veces punto estrella.

Ejemplo 1.3 *Se observa con el sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

que los valores y vectores propios correspondientes son,

$$\begin{array}{lll} \text{Valores} & r_1 = -1 & r_2 = -1 \\ \text{Vectores} & \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Su gráfica es,

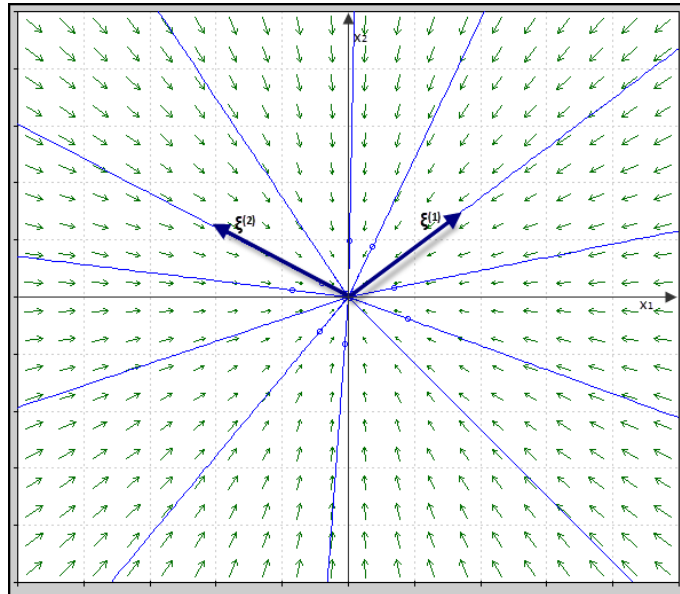


Figura 1.4.3 Plano fase con nodo impropio, dos vectores propios independientes; $r_1 = r_2 < 0$.

b. Un solo vector independiente

La solución general de la ecuación (1.7) es

$$\mathbf{x} = c_1 \xi e^{rt} + c_2 (\xi e^{rt} + \eta e^{rt}),$$

donde ξ es el vector propio y η es el vector propio generalizado que se asocia al valor propio repetido. Cuando un valor propio doble tiene un solo vector propio independiente, el punto crítico se denomina nodo impropio o degenerado.

Ejemplo 1.4 *En el sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

Los valores y vectores propios correspondientes son,

$$\begin{array}{lll} \text{Valores} & r_1 = -3 & r_2 = -3 \\ \text{Vectores} & \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

La gráfica es,

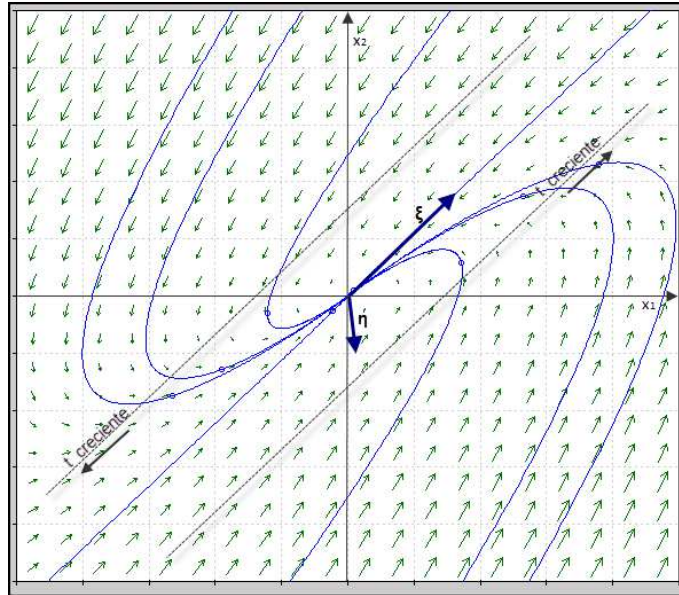


Figura 1.4.4 Plano fase con nodo impropio, un vector propio independiente; $r_1 = r_2 < 0$.

Caso 4. Valores propios complejos

Supóngase que los valores propios son $\delta \pm i\mu$, donde δ y μ son reales, con $\delta \neq 0$ y

$\mu > 0$. Los sistemas que tiene los valores propios $\delta \pm i\mu$ están tipificados por

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \delta & \mu \\ -\mu & \delta \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (1.11)$$

o, en forma escalar,

$$x'_1 = \delta x_1 + \mu x_2 \quad , \quad x'_2 = -\mu x_1 + \delta x_2. \quad (1.12)$$

El punto crítico se denomina punto espiral en este caso.

A menudo se emplean los términos sumidero espiral y fuente espiral para referirse a puntos espirales cuyas trayectorias se acercan al punto crítico o se alejan de él, respectivamente.

Ejemplo 1.5 *Se visualiza con la representación del sistema:*

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

cuyos valores y vectores propios son,

$$\begin{array}{ll} \text{Valores} & r_{1,2} = -1 \pm i \\ \text{Vectores} & \boldsymbol{\xi}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 \pm i \\ 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

La gráfica es,

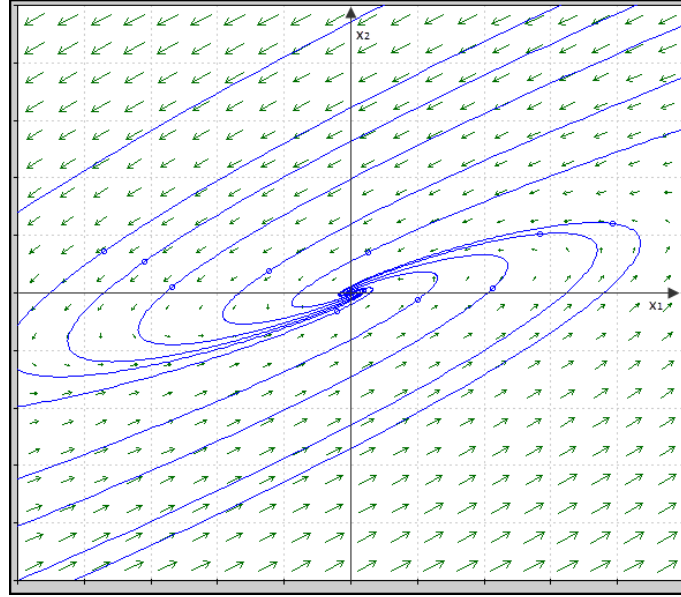


Figura 1.4.5 Plano fase con punto espiral;

$$r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu.$$

Caso 5. Valores propios imaginarios puros

En este caso $\delta = 0$ y el sistema (1.11) se reduce a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

con valores propios $\pm i\mu$. El punto crítico se denomina centro.

Ejemplo 1.6 Con el sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Los valores y vectores propios del sistema son,

$$\begin{array}{ll} \text{Valores} & r_{1,2} = \pm 3i \\ \text{Vectores} & \boldsymbol{\xi}^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \pm 3i \end{pmatrix}, \end{array}$$

y su correspondiente gráfica es,

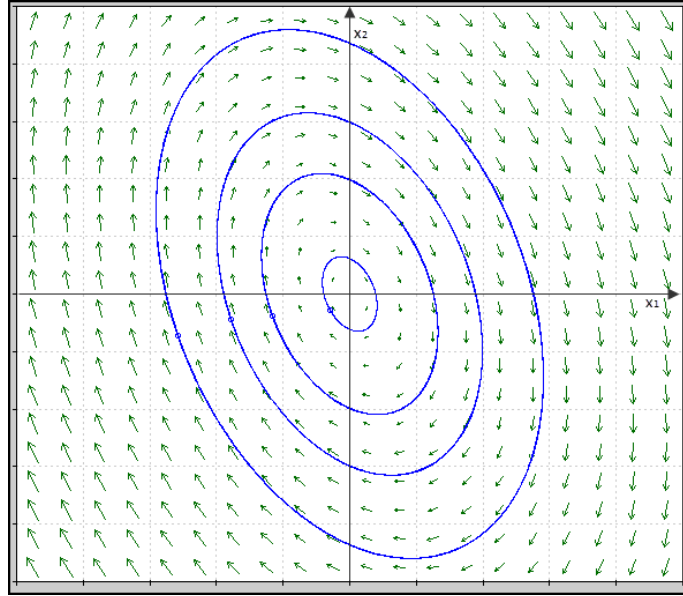


Figura 1.4.6 Plano fase con centro; $r_1 = i\mu$,
 $r_2 = -i\mu$.

A continuación se encuentra un resumen de los casos mencionados anteriormente.

Valores propios	Tipo de punto crítico	Estabilidad
$r_1 > r_2 > 0$	Nodo	Inestable
$r_1 < r_2 < 0$	Nodo	Asintóticamente estable
$r_2 < 0 < r_1$	Punto silla	Inestable
$r_1 = r_2 > 0$	Nodo Propio o impropio	Inestable
$r_1 = r_2 < 0$	Nodo Propio o impropio	Asintóticamente estable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Punto espiral	Inestable
$\lambda > 0$		
$\lambda < 0$		Asintóticamente estable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estable

Tabla 1. *Propiedades de Estabilidad del Sistema Lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$*

1.5. Estabilidad e inestabilidad

Se da una definición matemática precisa de los conceptos, al menos para los sistemas autónomos de la forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.14)$$

Se utiliza la notación $\|\mathbf{x}\|$ para designar la longitud o magnitud del vector \mathbf{x} .

Los puntos en donde $\mathbf{f}(x) = \mathbf{0}$ se denomina puntos críticos del sistema (1.14).

Se dice que un punto crítico \mathbf{x}^0 del sistema (1.14) es estable si dada cualquier $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que cada solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ del sistema, que en $t = 0$ satisface

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta, \quad (1.15)$$

existe para toda t positiva y satisface

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \epsilon,$$

para toda $t \geq 0$. Un punto crítico que no es estable se denomina inestable.

Se dice que un punto crítico \mathbf{x}^0 es asintóticamente estable si es estable y si existe δ_0 ($\delta_0 > 0$) tal que si una solución $\mathbf{x} = \phi(t)$ satisface

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0,$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0. \quad (1.16)$$

1.6. Matriz Jacobiana

Se considera ahora la ecuación no lineal general de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1.17)$$

y su comportamiento en el entorno de un punto $z \in \mathbb{R}^n$. Si z no es un punto crítico, entonces el desarrollo de Taylor de orden cero, entorno a z , es sencillamente

$f(z) \neq 0$, por lo que la ecuación (1.17) toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x) = cte,$$

y las trayectorias se convierten en rectas paralelas (se recuerda que dos trayectorias distintas no pueden cortarse si se cumple las hipótesis de buen comportamiento para f). Si z es un punto crítico de (1.17), el comportamiento local de las trayectorias viene dada por el término de primer orden del desarrollo de Taylor de f , que corresponde con su matriz jacobiana $D_z f = A$:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(z) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(z) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(z) \end{pmatrix}$$

Se considera entonces la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = Ay,$$

que es linealización de (1.17) seguida de un cambio de coordenadas adecuado para trasladar el punto crítico z al origen.

Capítulo 2

Algunos modelos matemáticos aplicados en ecología

Para los modelos matemáticos, se estudiarán las diferentes soluciones, a través de planos de fase; para así adquirir algunas formas de los principios ecológicos, además de la clasificación de los diferentes casos que puede arrojar un problema. La información de cada situación puede ser bastante extensa para su estudio, no solo por los procesos sino también por la realización gráfica explicativa que se debe tener en cuenta a la hora de solucionarlos, por ello se recurrirá a la explicación detallada de software matemático, con el cual se buscará darle un manejo más detallado a cada problema.

2.1. Competencia de Especies

Para la obtención del modelo matemático, se recurre al modelo logístico de la población, donde la tasa de crecimiento de la población P en la ausencia de competencia entre especies es,

$$g(P) = rP - aP^2.$$

Por otro lado se tiene en cuenta la interacción competitiva de las dos especies. Los

detalles se pueden evidenciar en el capítulo 2.3. Modelo Competencia de Especies: La ballena azul y la ballena de aleta.

Ejemplo 2.1 *Se considera que hay dos especies animales distintas que ocupan el mismo ecosistema, como competidores en el mismo uso de los mismos recursos, como alimento o espacio vital.*

Se analiza el comportamiento cualitativo de las soluciones del sistema,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} = y(0.75 - y - 0.5x). \end{cases} \quad (2.1)$$

Los puntos críticos se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas,

$$x(1 - x - y) = 0, \quad y(0.75 - y - 0.5x) = 0. \quad (2.2)$$

Se obtiene un punto crítico en $(0, 0)$. Ahora si en la ecuación $x(1 - x - y) = 0$ se tiene $x = 0$, y se sustituye en $y(0.75 - y - 0.5x) = 0$, se tiene un punto crítico en $(0, 0.75)$.

Del mismo modo, si en la ecuación $y(0.75 - y - 0.5x) = 0$, se hace $y = 0$ y se sustituye en $x(1 - x - y) = 0$, se tiene un punto crítico en $(1, 0)$.

Por último, si en la ecuación $x(1 - x - y) = 0$, se hace $y = 1 - x$, y se sustituye en $y(0.75 - y - 0.5x) = 0$, se obtiene,

$$\begin{aligned} (1 - x)[0.75 - (1 - x) - 0.5x] &= 0, \quad \text{si } x \neq 1 \\ 0.75 - 1 + x - 0.5x &= 0, \end{aligned}$$

de donde, $x = 0.5$.

Como $x = 0.5$, entonces de $y = 1 - x$, se obtiene que $y = 0.5$, y así se tiene un punto crítico en $(0.5, 0.5)$.

En conclusión, se consigue los siguientes puntos críticos: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 0.75)$ y $(0.5, 0.5)$. Donde los tres primeros implican la extinción de una o ambas especies, porque se encuentra el cero tanto en una como en las dos especies; sólo el último corresponde a la supervivencia a largo plazo de ambas especies.

A continuación se observa el campo direccional para el sistema de ecuaciones diferenciales.

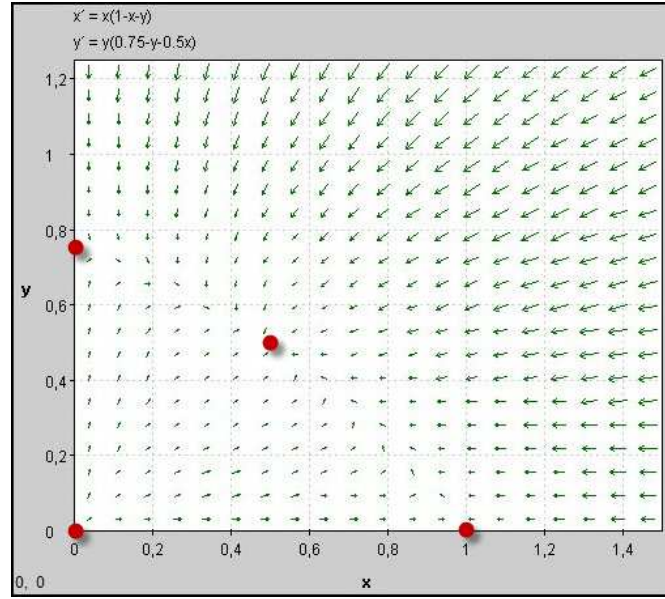


Figura 2.1.1 Campo Direccional.

Entonces se obtiene el sistema lineal cerca de un punto crítico (X, Y) , de dos formas.

Primero, es posible usar la sustitución $y = Y + v$ y $x = X + u$ en la ecuación (2.1), reservando sólo los términos que son lineales en u y v .

I. Reemplazando en $x(1-x-y)$ respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned}
 x(1-x-y) &= (X+u)(1-(X+u)-(Y+v)) \\
 &= (X+u) - (X+u)^2 - (X+u)(Y+v) \\
 &= (X+u) - (X^2 + 2Xu + u^2) - (XY + Xv + Yu + uv) \\
 &= X + u - X^2 - 2Xu - u^2 - XY - Xv - Yu - uv.
 \end{aligned}$$

Los términos que son lineales en u y v , son:

$$\frac{du}{dt} = u - 2Xu - Yu \quad , \quad \frac{dv}{dt} = -Xv \quad .$$

II. Reemplazando en $y(0.75 - y - 0.5x)$ respectivamente se tiene:

$$\begin{aligned}
y(0.75 - y - 0.5x) &= (Y + v)(0.75 - (Y + v) - 0.5(X + u)) \\
&= 0.75(Y + v) - (Y + v)^2 - 0.5(X + u)(Y + v) \\
&= (0.75Y + 0.5v) - (Y^2 + 2Yv + v^2) \\
&\quad - (0.5XY + 0.5Xv + 0.5Yu + 0.5uv) \\
&= 0.75Y + 0.75v - Y^2 - 2Yv - v^2 \\
&\quad - 0.5XY - 0.5Xv - 0.5Yu - 0.5uv
\end{aligned}$$

se tienen los términos que son lineales en u y v ,

$$\frac{du}{dt} = -0.5Yu \quad , \quad \frac{dv}{dt} = 0.75v - 2Yv - 0.5Xv \quad .$$

De manera alternativa, puede usarse la ecuación resultante del sistema no lineal general,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad ,$$

que se escribe en la forma escalar,

$$x' = F(x, y) \quad , \quad y' = G(x, y) \quad ,$$

y es un sistema casi lineal en la vecindad de un punto crítico (x_0, y_0) , siempre que las funciones F y G tengan derivadas parciales continuas hasta el orden dos.

Para demostrarlo, se utilizan desarrollos en series de Taylor alrededor del punto (x_0, y_0) para escribir $F(x, y)$ y $G(x, y)$ en la forma

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y) \\
G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y) \quad ,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\eta_1(x, y)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}} &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{cuando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0) \\
\frac{\eta_2(x, y)}{\sqrt{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]}} &\rightarrow 0 \quad , \quad \text{cuando } (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Se observa que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$, y también

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x - x_0)}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(y - y_0)}{dt}.$$

Entonces,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix},$$

donde

$$u = x - x_0, \quad v = y - y_0.$$

(2.3)

De (2.3) junto con la ecuación (2.1), se obtiene

$$F(x, y) = x(1 - x - y) = x - x^2 - xy,$$

$$G(x, y) = y(0.75 - y - 0.5x) = 0.75y - y^2 - 0.5xy,$$

y así

$$F_x(x_0, y_0) = 1 - 2X - Y, \quad F_y(x_0, y_0) = -X$$

$$G_x(x_0, y_0) = -0.5Y, \quad G_y(x_0, y_0) = 0.75 - 2Y - 0.5X,$$

de modo que el sistema lineal pasa a ser

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X - Y & -X \\ -0.5Y & 0.75 - 2Y - 0.5X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Se hace un análisis para cada punto crítico.

1. Para el punto crítico $x = 0, y = 0$.

Este punto crítico corresponde a un estado en el que ambas especies mueren como resultado de su competencia mutua.

También al hacer $X = Y = 0$ en la ecuación (2.4), se obtiene cerca del origen el

sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. Los valores propios y vectores propios del sistema anterior son:

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.75 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1 - \lambda)(0.75 - \lambda) - (0)(0) \\ &= 0.75 - \lambda - 0.75\lambda + \lambda^2 \\ \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \lambda^2 - 1.75\lambda + 0.75, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-(-1.75) \pm \sqrt{(-1.75)^2 - 4(1)(0.75)}}{2(1)},$$

así los valores propios son:

$$r_1 = 0.75,$$

$$r_2 = 1.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = 0.75$,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 1 - 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75 - 0.75 & 0 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$0.25x = 0,$$

$$x = 0,$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \{(x, y) \mid x = 0\} \\ &= \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = 1$,

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.75-1 & 0 \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.25 & 0 \end{array} \right),$$

de donde se tiene que

$$-0.25y = 0,$$

$$y = 0,$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} &= \{(x, y) \text{ , } y = 0\} \\ &= \{(x, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De modo que la solución general del sistema (2.1) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.75t}.$$

El origen es un nodo inestable tanto del sistema lineal como del sistema no lineal.

Ver (Tabla 1).

En la vecindad del origen, todas las trayectorias son tangentes al eje “y”, excepto por una trayectoria que se encuentra a lo largo del eje “x”, como se observa en la gráfica.

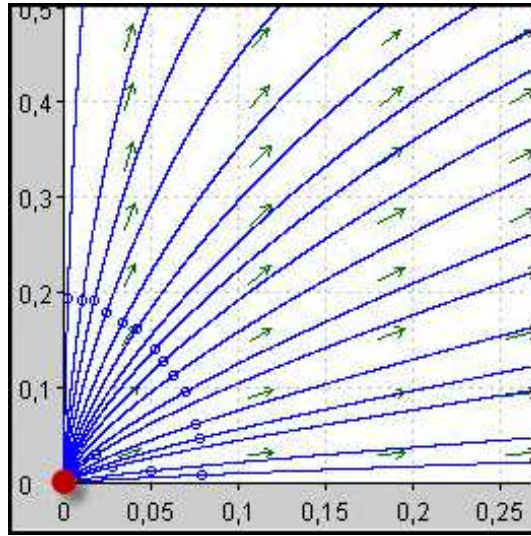


Figura 2.1.2 Trayectoria en el punto crítico $(0,0)$

2. Para el punto crítico $x = 0, y = 0.75$.

Este punto crítico corresponde a un estado en el que la especie “y” sobrevive pero la especie “x” muere.

El sistema lineal correspondiente a (2.4) cuando se hace $y = 0.75$ y $x = 0$, es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a. Los valores propios y vectores propios del sistema anterior corresponde a:

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0.25 - \lambda & 0 \\ -0.375 & -0.75 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (0.25 - \lambda)(-0.75 - \lambda) - (-0.375)(0) \\ &= -0.1875 - 0.25\lambda + 0.75\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 0.5\lambda - 0.1875,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.5^2 - 4(1)(-0.1875)}}{2(1)},$$

y así los valores propios son:

$$r_1 = -0.75,$$

$$r_2 = 0.25.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -0.75$,

$$\begin{pmatrix} 0.25 - (-0.75) & 0 \\ -0.375 & -0.75 - (-0.75) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -0.375 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

se tiene que

$$x = 0,$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \{(x, y) \mid x = 0\} \\ &= \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(0, 1) \mid y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = 0.25$,

$$\begin{pmatrix} 0.25 - 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 - 0.25 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.375 & -1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} -0.375x - y &= 0, \\ y &= -\frac{3}{8}x, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} &= \left\{ (x, y) , y = -\frac{3}{8}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{3}{8}x \right) , x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \left(1, -\frac{3}{8} \right) , x \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De modo que la solución general del sistema (2.1) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t} + c_2 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0.25t}.$$

Dado que los valores propios tienen signos opuestos, el punto $(0, 0.75)$ es un punto silla y, por tanto, es un punto de equilibrio inestable del sistema lineal y del no lineal, ver (Tabla 1).

El comportamiento de las trayectorias cerca de $(0, 0.75)$ puede verse a partir de la ecuación anterior; si $c_2 = 0$, entonces existe un par de trayectorias que tienden al punto crítico a lo largo del eje “y”, como se observa en la gráfica,

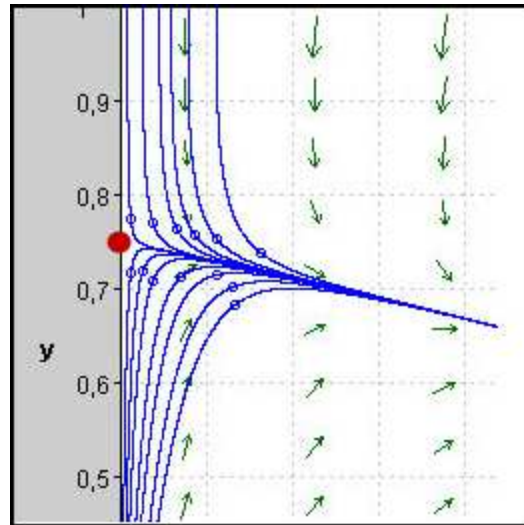


Figura 2.1.3 Trayectoria en el punto crítico $(0, 0.75)$.

3. Para el punto crítico $x = 1, y = 0$

Este punto crítico corresponde a un estado en que la especie “x” sobrevive a la competencia pero la especie “y” muere.

El sistema lineal correspondiente a (2.4) cuando se hace $x = 1$ y $y = 0$, es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. *Los valores propios y vectores propios del sistema anterior son:*

i. *Valores propios,*

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 0.25 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (-1 - \lambda)(0.25 - \lambda) - (0)(-1) \\ &= -0.25 + \lambda - 0.25\lambda + \lambda^2 \\ \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \lambda^2 + 0.75\lambda - 0.25, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-0.75 \pm \sqrt{0.75^2 - 4(1)(-0.25)}}{2(1)},$$

así los valores propios son:

$$\begin{aligned} r_1 &= -1, \\ r_2 &= 0.25. \end{aligned}$$

ii. *El vector propio asociado a cada valor propio es:*

A. *Para $r_1 = -1$,*

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} -1 - (-1) & -1 & 0 \\ 0 & 0.25 - (-1) & 0 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1.25 & 0 \end{array} \right), \end{aligned}$$

y se obtiene que

$$y = 0,$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= \{(x, y) \text{ , } y = 0\} \\ &= \{(x, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = 0.25$,

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|c} -1 - 0.25 & -1 & 0 \\ 0 & 0.25 - 0.25 & 0 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} -1.25 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),\end{aligned}$$

por tanto

$$-1.25x - y = 0,$$

$$-y = \frac{5}{4}x,$$

$$y = -\frac{5}{4}x,$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} &= \left\{ (x, y) \text{ , } y = -\frac{5}{4}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{5}{4}x \right) \text{ , } x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \left(1, -\frac{5}{4} \right) \text{ , } x \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$,

de modo que la solución general del sistema (2.1) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0.25t}.$$

Dado que los valores propios tienen signos opuestos, el punto $(1,0)$ es un punto silla y, por tanto, es un punto de equilibrio inestable del sistema lineal y del no lineal, ver (Tabla 1).

El comportamiento de las trayectorias cerca de $(1,0)$ puede verse a partir de la ecuación anterior; si $c_2 = 0$, entonces existe un par de trayectorias que tienden al punto crítico a lo largo del eje “ x ”; como se observa en la gráfica,

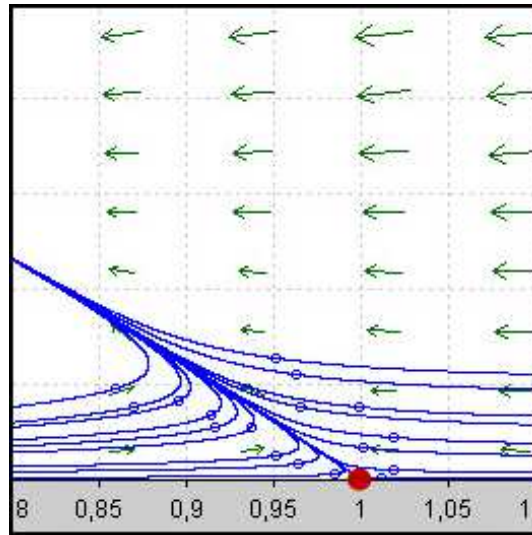


Figura 2.1.4 Trayectoria en el punto crítico $(1,0)$.

4. Para el punto crítico $x = 0.5$, $y = 0.5$

Este punto crítico corresponde a un estado de equilibrio mixto o coexistencia en la competencia entre las dos especies.

También al hacer $X = Y = 0.5$ en la ecuación (2.4), se obtiene cerca del origen el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

a. Los valores propios y vectores propios del sistema anterior corresponden a:

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (-0.5 - \lambda)(-0.5 - \lambda) - (-0.25)(-0.5) \\ &= 0.25 + 0.5\lambda + 0.5\lambda + \lambda^2 - 0.125 \\ \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \lambda^2 + \lambda + 0.125, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(0.125)}}{2(1)},$$

así los valores propios son:

$$r_1 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{4},$$

$$r_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{4}.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} -0.5 - \left(-\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right) & -0.5 & 0 \\ -0.25 & -0.5 - \left(-\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right) & 0 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{2}}{4} & -0.5 & 0 \\ -0.25 & 0.354 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Se consigue que

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x - 0.5y = 0,$$

de donde

$$x = \sqrt{2}y,$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(1)} &= \{(x, y) \text{ , } x = \sqrt{2}y\} \\ &= \{(\sqrt{2}y, y) \text{ , } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(\sqrt{2}, 1) \text{ , } y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Entonces el vector asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = \frac{-2 + \sqrt{2}}{4}$,

$$\begin{aligned}&\left(\begin{array}{cc|c} -0.5 - \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{4} \right) & -0.5 & 0 \\ -0.25 & -0.5 - \left(\frac{-2 + \sqrt{2}}{4} \right) & 0 \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{2}}{4} & -0.5 & 0 \\ -0.25 & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 \end{array} \right),\end{aligned}$$

y se tiene que

$$-\frac{\sqrt{2}}{4}x - 0.5y = 0$$

de donde

$$x = -\sqrt{2}y,$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} &= \{(x, y) \text{ , } x = -\sqrt{2}y\} \\ &= \{(-\sqrt{2}y, y) \text{ , } y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-\sqrt{2}, 1) \text{ , } y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

De modo que la solución general del sistema (2.1) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{2+\sqrt{2}}{4}t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\frac{-2+\sqrt{2}}{4}t}.$$

Dado que ambos valores propios son negativos, el punto crítico $(0.5, 0.5)$ es un nodo asintóticamente estable del sistema lineal y el no lineal, ver (Tabla 1).

Todas las trayectorias tienden al punto crítico cuando $t \rightarrow \infty$. Un par de trayectorias se aproximan al punto crítico a lo largo de la recta con pendiente $\frac{\sqrt{2}}{2}$ determinada a partir del vector propio $\xi^{(2)}$. Todas las demás trayectorias tienden al punto crítico tangentes a la recta con pendiente $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ determinada a partir del vector propio $\xi^{(1)}$, como se observa en la gráfica.

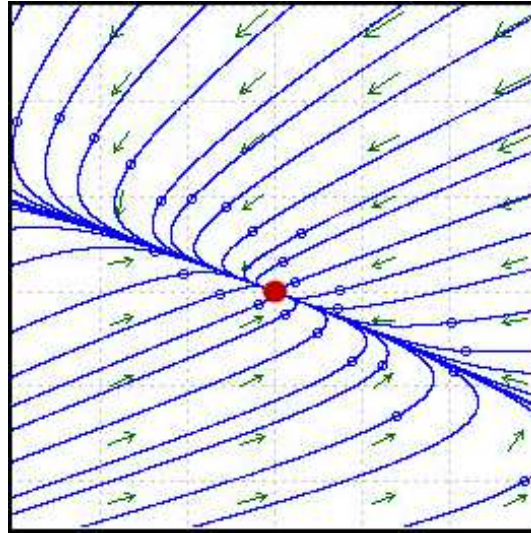


Figura 2.1.5 Trayectoria en el punto crítico $(0.5, 0.5)$.

A continuación se observa el retrato de fase para el sistema de ecuaciones

diferenciales empleado.

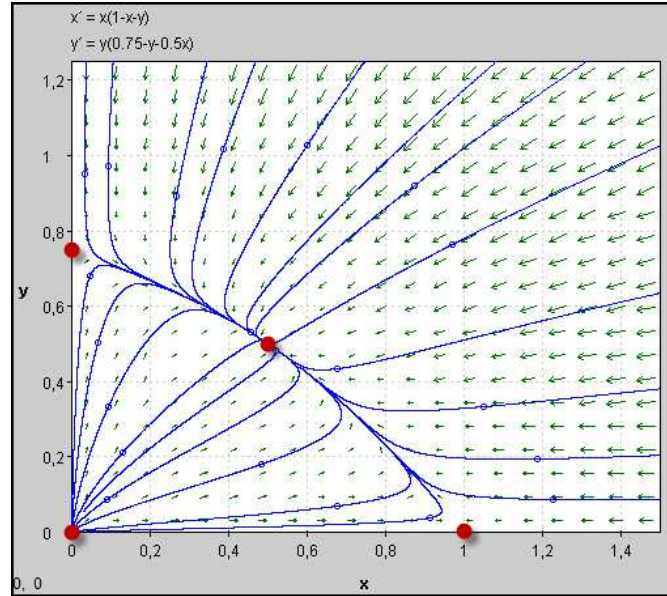


Figura 2.1.6. Retrato fase.

Puede verse que se comportan de la manera predicha por el sistema lineal cerca de ese punto.

En virtud de que el sistema lineal es no negativo, por la ecuación $\frac{dx}{dt} = x(1-x-y)$ se concluye que x aumenta o disminuye si $1-x-y > 0$ ó $1-x-y < 0$; de manera análoga, por la ecuación $\frac{dy}{dt} = y(0.75-y-0.5x)$ se ve que “ y ” aumenta o disminuye según $0.75-y-0.5x > 0$ ó $0.75-y-0.5x < 0$.

La recta $x+y-1=0$ se llama nuliclina “ x ” debido a que x' es cero en cada uno de los puntos de ella; por tanto, siempre que una trayectoria corta la nuliclina “ x ”, su recta tangente debe ser paralela al eje “ y ”. De manera semejante, la recta $0.5x+y-0.75=0$ se llama nuliclina “ y ”; las trayectorias que cruzan esta recta tienen tangentes paralelas al eje “ x ”.

A continuación se observa las nuliclinas del sistema de ecuaciones diferenciales

empleado con sus correspondientes regiones.

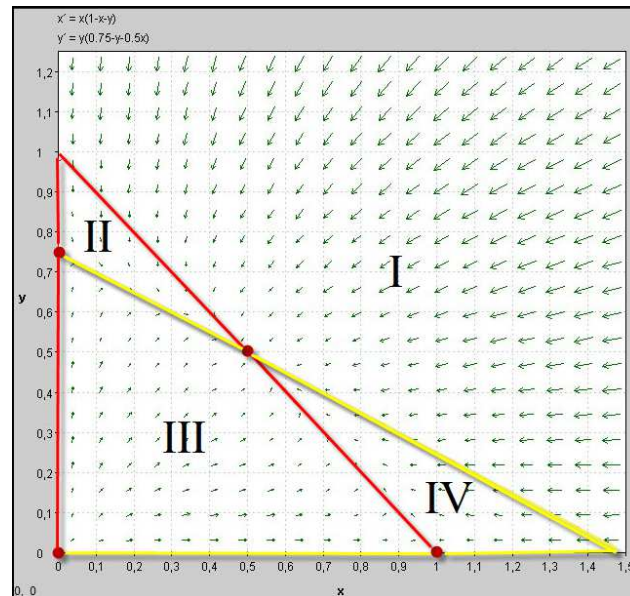


Figura 2.1.7. Nuliclinas.

Las dos nuliclinas crean cuatro regiones en el primer cuadrante del plano xy .

Hacia abajo y hacia la izquierda en la región I y hacia abajo y hacia la derecha en la región II, en la región III se observa que $x' > 0$ y $y' > 0$, por tanto, siempre que el punto (x, y) esté en la región III se debe estar moviendo hacia arriba y hacia la derecha. De manera semejante, el punto (x, y) se mueve hacia arriba y hacia la izquierda en la región IV.

Por tanto, en todos los casos el punto (x, y) se desplaza hacia el punto crítico $(0.5, 0.5)$. Como consecuencia, si los dos valores iniciales x_0 y y_0 son positivos, entonces, después de que haya transcurrido un tiempo largo, es de esperar ver al punto (x, y) cerca del punto crítico $(0.5, 0.5)$, que representa los niveles de población de las dos especies que pueden coexistir en equilibrio mutuo y con abastecimiento de alimento disponible.

Esta configuración de equilibrio no depende de las poblaciones iniciales x_0 y y_0 , mientras sean positivas.

Nuliclinas con sus respectivas direcciones del sistema de ecuaciones diferenciales empleado.

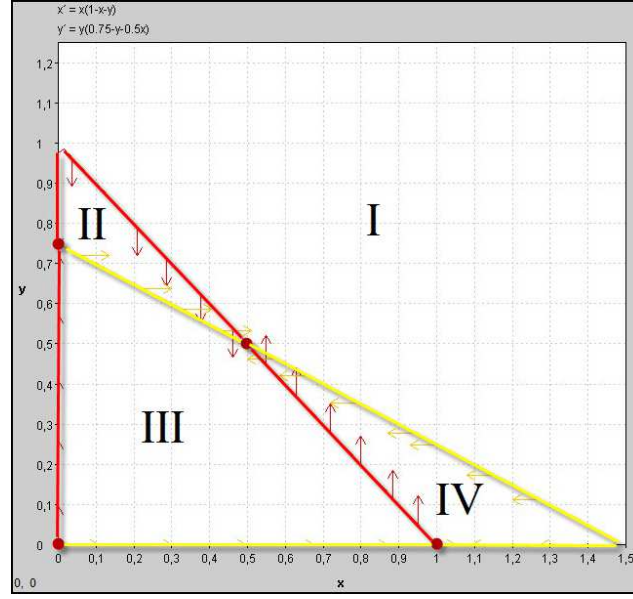


Figura 2.1.8. Nuliclinas con campo direccional.

Ejemplo 2.2 *Ahora se considera que hay dos especies animales distintas que ocupan el mismo ecosistema, en uso de los mismos recursos, como alimento o espacio vital. Se analiza el comportamiento cualitativo de soluciones del sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x-y) \\ \frac{dy}{dt} = y(0.5-0.25y-0.75x) \end{cases} \quad (2.5)$$

cuando x y y son no negativos.

Los puntos críticos se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones algebraicas.

$$x(1-x-y) = 0 \quad , \quad y(0.5-0.25y-0.75x) = 0. \quad (2.6)$$

Primero se observa que $x = 0$ y $y = 0$. Se tiene así un punto crítico en $(0, 0)$.

Ahora de la ecuación $x(1 - x - y) = 0$ se logra, $x = 0$, y se sustituye en $y(0.5 - 0.25y - 0.75x) = 0$, se obtiene un punto crítico en $(0, 2)$.

Del mismo modo, de la ecuación $y(0.5 - 0.25y - 0.75x) = 0$, se adquiere $y = 0$ y se sustituye en $x(1 - x - y) = 0$, de ahí se tiene un punto crítico en $(1, 0)$.

Por otro lado de la ecuación $x(1 - x - y) = 0$, se tiene $y = 1 - x$. Se sustituye en $y(0.5 - 0.25y - 0.75x) = 0$, se obtiene el punto crítico en $(0.5, 0.5)$.

Los puntos críticos son: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ y $(0.5, 0.5)$. Donde los tres primeros implican la extinción de una o ambas especies; sólo el ultimo corresponde a la supervivencia a largo plazo de ambas especies.

A continuación se observa el campo direccional para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado.

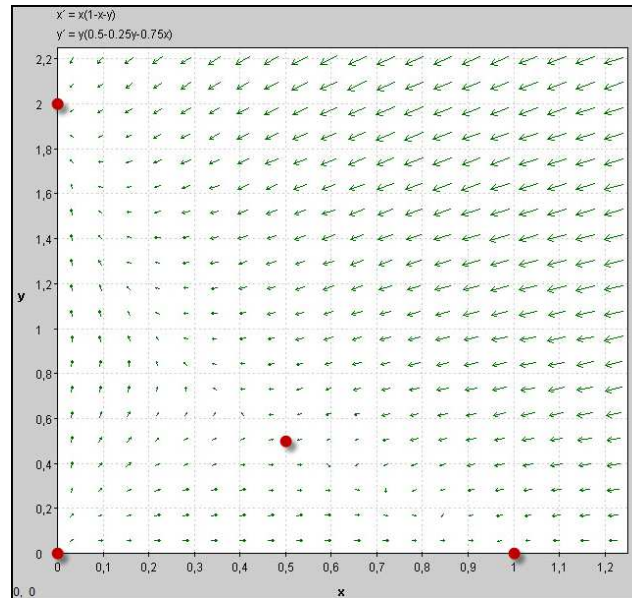


Figura 2.1.9. Campo direccional.

Para obtener el sistema lineal cerca de un punto crítico (X, Y) , se usa la sustitución $y = Y + v$ y $x = X + u$ en la ecuación (2.5), se tiene sólo los términos que son

lineales en u y v . Se realiza los reemplazos de modo que el sistema lineal pasa a ser

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X - Y & -X \\ -0.75Y & 0.5 - 0.5Y - 0.75X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Se hace un análisis para cada punto crítico

1. Para el punto crítico $x = 0, y = 0$

Este punto crítico corresponde a un estado en el que ambas especies mueren como resultado de su competencia mutua.

Cerca del origen el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. Los valores propios y vectores propios del sistema anterior son:

i. Valores propios

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0.5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-(-1.5) \pm \sqrt{(-1.5)^2 - 4(1)(0.5)}}{2(1)},$$

y así los valores propios son:

$$r_1 = 0.5,$$

$$r_2 = 1.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = 0.5$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y se obtiene que

$$x = 0,$$

y así el vector propio asociado es:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

B. Para $r_2 = 1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \end{array} \right),$$

de donde

$$y = 0,$$

y el vector propio asociado es

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que la solución general del sistema (2.5) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{0.5t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

El origen es un nodo inestable tanto del sistema lineal como del sistema no lineal, ver (Tabla 1).

En la vecindad del origen, todas las trayectorias son tangentes al eje “y” excepto por una trayectoria que se encuentra a lo largo del eje “x”, como se observa en la

gráfica.

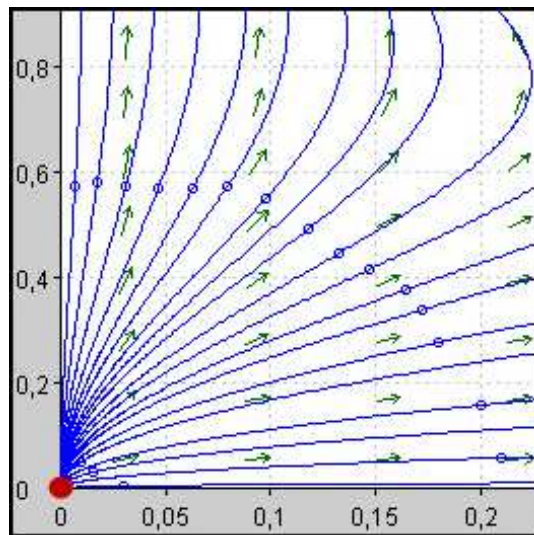


Figura 2.1.10 Trayectoria en el punto crítico $(0,0)$.

2. Para el punto crítico $x = 0, y = 2$

Este punto crítico corresponde a un estado en el que la especie “y” sobrevive pero la especie “x” muere.

El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. Valores propios y vectores propios del sistema anterior.

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ -1.5 & -0.5 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 1.5\lambda + 0.5,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-1.5 \pm \sqrt{1.5^2 - 4(1)(0.5)}}{2(1)},$$

y así los valores propios son:

$$\begin{aligned}r_1 &= -1, \\r_2 &= -0.5.\end{aligned}$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.5 & 0 \end{array} \right),$$

y se tiene que

$$y = 3x,$$

y así el vector propio asociado

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

B. Para $r_2 = -0.5$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.5 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

y se obtiene que

$$x = 0,$$

y así

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de modo que la solución general del sistema (2.5) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.5t}.$$

Dado que los valores propios tienen signos iguales, el punto $(0, 2)$ es un punto silla y, por tanto, es un punto de equilibrio inestable del sistema lineal y del no lineal, ver (Tabla 1).

El comportamiento de las trayectorias cerca de $(0, 2)$ puede verse a partir de la ecuación anterior. Si $c_2 = 0$, entonces existe un par de trayectorias que tienden al

punto crítico a lo largo del eje y , como se observa en la gráfica.

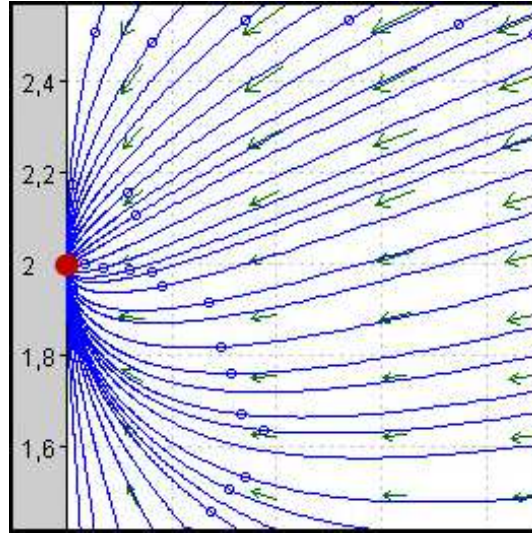


Figura 2.1.11 Trayectoria en el punto crítico $(0, 2)$.

3. Para el punto crítico $x = 1, y = 0$

Este punto crítico corresponde a un estado en el que la especie “ x ” sobrevive a la competencia pero la especie “ y ” muere.

El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. Valores propios y vectores propios del sistema anterior

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0 & -0.25 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 1.25\lambda + 0.25,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-1.25 \pm \sqrt{1.25^2 - 4(1)(0.25)}}{2(1)},$$

y así los valores propios son:

$$\begin{aligned} r_1 &= -1, \\ r_2 &= -0.25. \end{aligned}$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0.75 & 0 \end{array} \right),$$

de donde se obtiene

$$y = 0,$$

y así

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B. Para $r_2 = -0.25$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -0.75 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

se adquiere que

$$y = -\frac{3}{4}x,$$

y así

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

de modo que la solución general del sistema (2.5) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-0.25t}.$$

Dado que los valores propios son del mismo signo, el punto $(1,0)$ es un nodo y, por tanto, es un punto de equilibrio estable del sistema lineal y del no lineal, ver (Tabla 1).

El comportamiento de las trayectorias cerca de $(1,0)$ puede verse a partir de la ecuación anterior. Si $c_2 = 0$, entonces existe un par de trayectorias que tienden al

punto crítico a lo largo del eje x , como se observa en la gráfica,

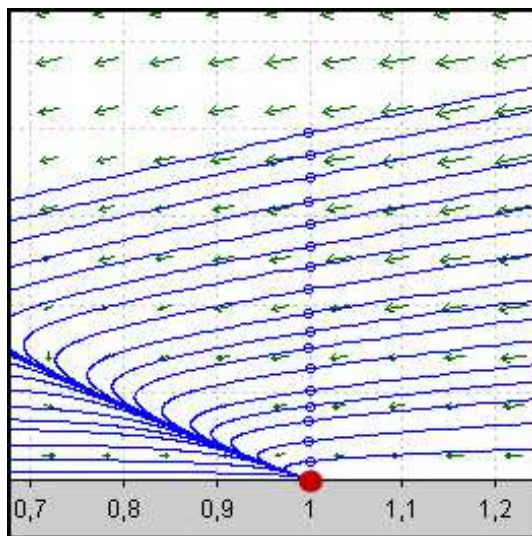


Figura 2.1.12. Trayectoria en el punto crítico $(1, 0)$.

4. Para el punto crítico $x = 0.5$, $y = 0.5$

Este punto crítico corresponde a un estado en el que ambas especies mueren como resultado de su competencia mutua.

El sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.375 & -0.125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. Valores propios y vectores propios del sistema anterior

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -0.5 - \lambda & -0.5 \\ -0.375 & -0.125 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 0.625\lambda - 0.125,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-0.625 \pm \sqrt{0.625^2 - 4(1)(-0.125)}}{2(1)},$$

y así los valores propios son:

$$r_1 = -\frac{5 + \sqrt{57}}{16},$$

$$r_2 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{16}.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -\frac{5 + \sqrt{57}}{16}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{-3 + \sqrt{57}}{16} & -0.5 & 0 \\ -0.375 & \frac{3 + \sqrt{57}}{16} & 0 \end{array} \right),$$

y se obtiene que

$$y = \frac{-3 + \sqrt{57}}{8}x,$$

y así

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3 + \sqrt{57}}{8} \end{pmatrix}.$$

B. Para $r_2 = \frac{-5 + \sqrt{57}}{16}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{3 + \sqrt{57}}{16} & -0.5 & 0 \\ -0.375 & \frac{3 + \sqrt{57}}{16} & 0 \end{array} \right),$$

y se tiene que

$$y = -\frac{3 + \sqrt{57}}{8}x,$$

y así

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3 + \sqrt{57}}{8} \end{pmatrix},$$

de modo que la solución general del sistema (2.5) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 + \sqrt{57} \\ 8 \end{pmatrix} e^{-\frac{5+\sqrt{57}}{16}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 - \sqrt{57} \\ 8 \end{pmatrix} e^{-\frac{-5+\sqrt{57}}{16}t}.$$

Dado que los valores propios tienen signos opuestos, el punto crítico $(0.5, 0.5)$ es un punto silla y por tanto es un punto inestable del sistema lineal y el no lineal, ver (Tabla 1).

A medida que se acercan al punto crítico, las trayectorias entrantes son tangentes a la recta con pendiente $\frac{\sqrt{57}-3}{8}$ determinada a partir de vector propio $\xi^{(2)}$, como se observa en la gráfica.

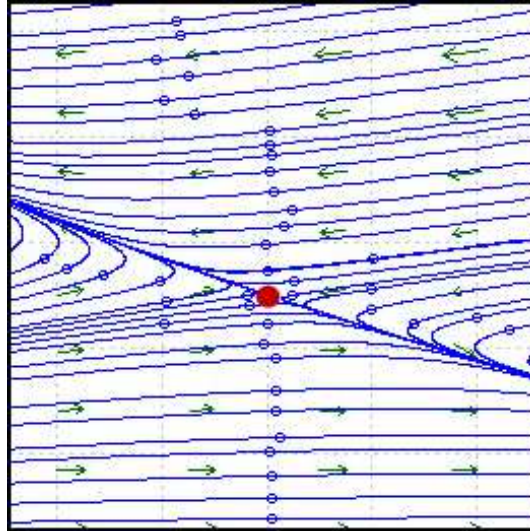


Figura 2.1.13 Trayectoria en el punto crítico $(0.5, 0.5)$.

Se presenta el retrato fase para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado,

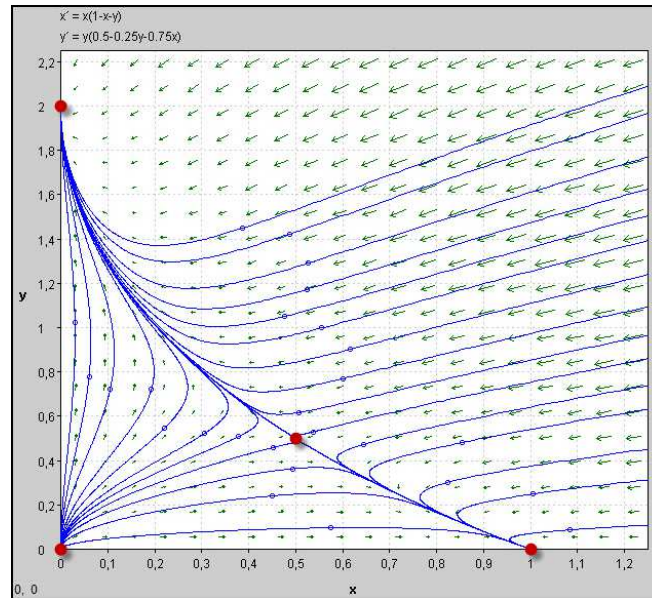


Figura 2.1.14. Retrato fase.

Puede verse que se comportan de la manera predicha por el sistema lineal cerca de ese punto.

En virtud de que el sistema es no negativo, por la ecuación $\frac{dx}{dt} = x(1-x-y)$ se observa que $\frac{dx}{dt} > 0$ o $\frac{dx}{dt} < 0$ según si $1-x-y$ es positiva o negativa.

De manera semejante, el signo $\frac{dy}{dt}$ es el mismo que el de $0.5 - 0.75x - 0.25y$.

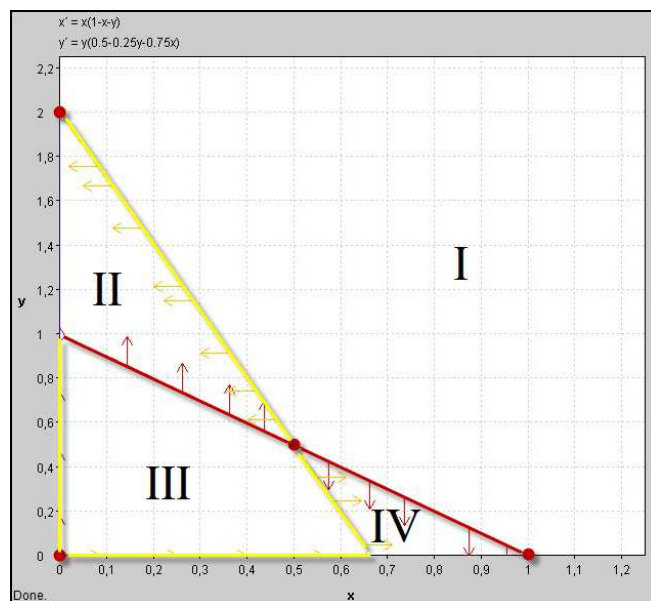


Figura 2.1.15. Nuliclinas.

Las nuliclinas $x+y = 1$ y $0.75x+0.25y = 0.5$ dividen el primer cuadrante en cuatro regiones, en cada una de las cuales las trayectorias del sistema tienen las direcciones indicadas.

La solución de equilibrio mixto $(0.5, 0.5)$ tienen un interés especial por que corresponde a la coexistencia entre las dos especies.

En la figura anterior se muestra que en las regiones III y IV parece que las trayectorias tienden a $(0.5, 0.5)$, en tanto que en las regiones I y II parece que las trayec-

torias se alejan de este punto crítico.

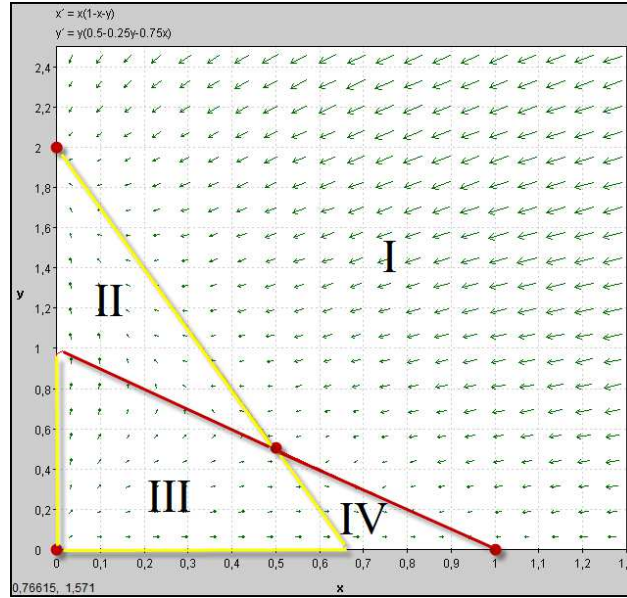


Figura 2.1.16 Nuliclinas con campo direccional.

Ahora de manera general se supone que en algún ambiente cerrado, existen dos especies similares que compiten por un suministro de alimento limitado, por ejemplo, dos especies de peces en un estanque que no se depredan entre sí, sino que compiten por el alimento disponible. Sean “ x ” y “ y ” las poblaciones de las dos especies en el momento “ t ”.

Regida por una ecuación logística, de este modo,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x), \\ \frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y), \end{cases} \quad (2.8)$$

respectivamente, donde ϵ_1 y ϵ_2 son las tasas de crecimiento de las dos poblaciones, y $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ y $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ son sus niveles de saturación.

Sin embargo cuando están presentes ambas especies, cada una incidirá en la disponibilidad de alimento para la otra. En efecto, una reduce la tasa de crecimiento y la

población de saturación de la otra. La expresión más simple para el decremento de la tasa de crecimiento de la especie “ x ” debido a la presencia de la especie “ y ” se obtiene al sustituir el factor tasa de crecimiento $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ de la ecuación (2.8) por $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$, donde α_1 es una medida del grado en que la especie “ y ” interfiere con la especie “ x ”. De modo similar, en la ecuación (2.8) se sustituye $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$. De este modo se tiene el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x (\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) , \\ \frac{dy}{dt} = y (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) . \end{cases} \quad (2.9)$$

Los valores de constantes positivas ϵ_1 , σ_1 , α_1 , ϵ_2 , σ_2 y α_2 dependen de la especie particular que se considere y, en general, deben determinarse a partir de observaciones. Se desea conocer las soluciones de la ecuaciones (2.9) para las cuales x y y son no negativas.

Las ecuaciones para las isoclinas vienen dadas por,

$$\begin{aligned} x (\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) &= 0 \\ \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= 0 \\ y &= \frac{\epsilon_1 - \sigma_1 x}{\alpha_1} , \end{aligned}$$

Donde la x - *isoclinas* es $y = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} - \frac{\sigma_1}{\alpha_1} x$

De la misma manera

$$\begin{aligned} y (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) &= 0 \\ \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= 0 \\ y &= \frac{\epsilon_2 - \alpha_2 x}{\sigma_2} . \end{aligned}$$

Así la: y - *isoclinas* corresponde a $y = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2} x$.

En los puntos de la x - *isoclinas* las trayectorias tienen pendiente vertical, y en los puntos de la y - *isoclinas*, las trayectorias tienen pendiente horizontal. Ambas isoclinas son rectas con pendiente negativa.

Ocurren tres casos:

Caso 1. Ambas isoclinas coinciden

La ecuación de ambas isoclinas esta determinada por $y = n - mx$ donde:

$$n = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2},$$

$$m = \frac{\sigma_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}.$$

En este caso las isoclinas se divide al interior del cuadrante en dos regiones llamadas *I* y *II*.

Se visualiza estos resultados en la representación con $\epsilon_1 = 22$, $\sigma_1 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.75$, $k = 2$.

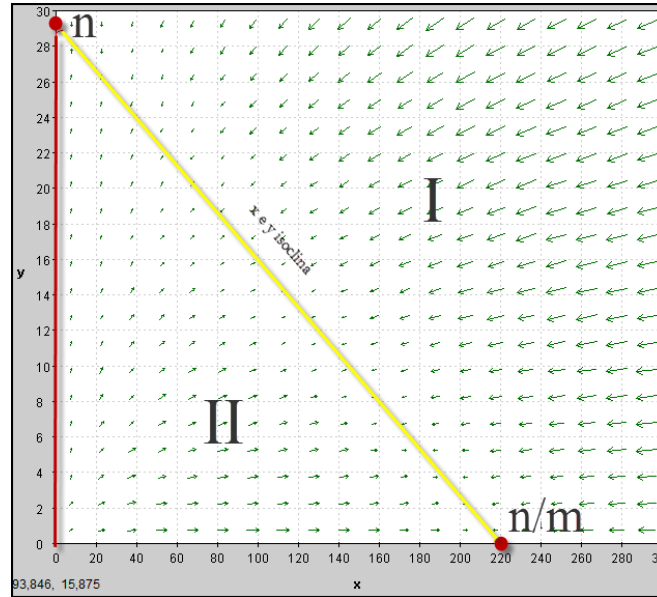


Figura 2.1.17 *Ambas isoclinas coinciden.*

A. En la región *I* se toma el punto P_1 de abscisa $x_1 = \frac{n}{m}$ y ordenada $y_1 > 0$. Donde

$$\frac{n}{m} = \frac{\left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}\right)}{\left(\frac{\sigma_1}{\alpha_1}\right)} = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \quad ; \quad \frac{n}{m} = \frac{\left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right)}{\left(\frac{\alpha_2}{\sigma_2}\right)} = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2}.$$

Se determina el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 y_1 \\
 &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{n}{m} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= -\alpha_1 y_1 < 0.
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{dx}{dt} < 0$,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_1 - \alpha_2 x_1 \\
 &= \epsilon_2 - \alpha_2 \left(\frac{n}{m} \right) - \sigma_2 y_1 \\
 &= \epsilon_2 - \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \sigma_2 y_1 \\
 &= -\sigma_2 y_1 < 0.
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} < 0$.

Por tanto en esta región la pendiente de las trayectorias es positiva, y su orientación es de derecha a izquierda.

Todos los puntos de la isoclina son puntos críticos, ya que sobre ellos se cumple $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$.

B. En la región *II* se escoge el punto P_2 de abscisa $x_2 = \frac{n}{3m}$ y de ordenada y_2 , la

tercera parte de la imagen x_2 por la isoclina:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{1}{3}(n - mx_2) \\
&= \frac{1}{3}\left[n - m\left(\frac{n}{3m}\right)\right] \\
&= \frac{1}{3}\left(n - \frac{n}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{2n}{3}\right) \\
&= \frac{2n}{9}.
\end{aligned}$$

Se calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$ en,

$$P_2\left(\frac{n}{3m}, \frac{2n}{9}\right) = P_2\left(\frac{\epsilon_1}{3\sigma_1}, \frac{2\epsilon_1}{9\alpha_1}\right) = P_2\left(\frac{\epsilon_2}{3\alpha_2}, \frac{2\epsilon_2}{9\sigma_2}\right) \text{ respectivamente:}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_2 - \alpha_1 y_2 \\
&= \epsilon_1 - \sigma_1\left(\frac{n}{3m}\right) - \alpha_1\left(\frac{2n}{9}\right) \\
&= \epsilon_1 - \sigma_1\left(\frac{\epsilon_1}{3\sigma_1}\right) - \alpha_1\left(\frac{2\epsilon_1}{9\alpha_1}\right) \\
&= \epsilon_1 - \frac{\epsilon_1}{3} - \frac{2\epsilon_1}{9} \\
&= \frac{4\epsilon_1}{9} > 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dx}{dt} > 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_2 - \alpha_2 x_2 \\
&= \epsilon_2 - \sigma_2\left(\frac{2n}{9}\right) - \alpha_2\left(\frac{n}{3m}\right) \\
&= \epsilon_2 - \sigma_2\left(\frac{2\epsilon_2}{9\sigma_2}\right) - \alpha_2\left(\frac{\epsilon_2}{3\alpha_2}\right) \\
&= \epsilon_2 - \frac{2\epsilon_2}{9} - \frac{\epsilon_2}{3} \\
&= \frac{4\epsilon_2}{9} > 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$.

En esta región la pendiente de la trayectorias es positiva, y su orientación es de izquierda a derecha.

En efecto, puesto que las isoclinas coinciden, tienen la misma pendiente y ordenada en el origen, así que:

$$\epsilon_1 = k\epsilon_2 ; \quad \sigma_1 = k\sigma_2 ; \quad \alpha_1 = k\alpha_2 ,$$

de forma que:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x (\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ &= x [(k\epsilon_2) - (k\sigma_2) x - (k\alpha_2) y] \\ &= kx (\epsilon_2 - \sigma_2 x - \alpha_2 y). \end{aligned}$$

Entonces $\frac{1}{kx} \frac{dx}{dt} = (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x)$.

También,

$$\frac{dy}{dt} = y (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).$$

Entonces $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = (\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x)$,

y restando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{kx} \frac{dx}{dt} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= 0, \\ \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} &= k \frac{1}{y} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

De donde $\frac{d}{dt} \ln(x) = k \frac{d}{dt} \ln(y)$.

Ahora se integra respecto al tiempo.

$$\int \frac{d}{dt} \ln(x) = \int k \frac{d}{dt} \ln(y)$$

$$\ln(x) + c = k \ln(y) + d$$

$$\ln(x) - k \ln(y) = cte$$

$$\ln(x) - \ln(y^k) = cte$$

$$\ln\left(\frac{x}{y^k}\right) = cte,$$

y, por tanto:

$$\frac{x}{y^k} = cte .$$

Además, esto permite obtener una expresión explícita para la ecuación de las orbitas en este caso:

$$y = (cte) x^{\frac{1}{k}} = (cte) x^{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} .$$

Caso 2. Las isoclinas no se cortan en el interior del primer cuadrante

En este caso se encuentra la situación en que ambas isoclinas son paralelas.

Se supone en primer lugar que la y - *isoclina* está por encima de la x - *isoclina*.

Dividiendo al interior del primer cuadrante en tres regiones llamadas *I*, *II* y *III*, se visualiza la siguiente gráfica con los valores $\epsilon_1 = 12$, $\sigma_1 = 0,1$, $\alpha = 0.75$, $\epsilon_2 = 3$, $\sigma_2 = 0.1$ y $\alpha_2 = 0.01$.

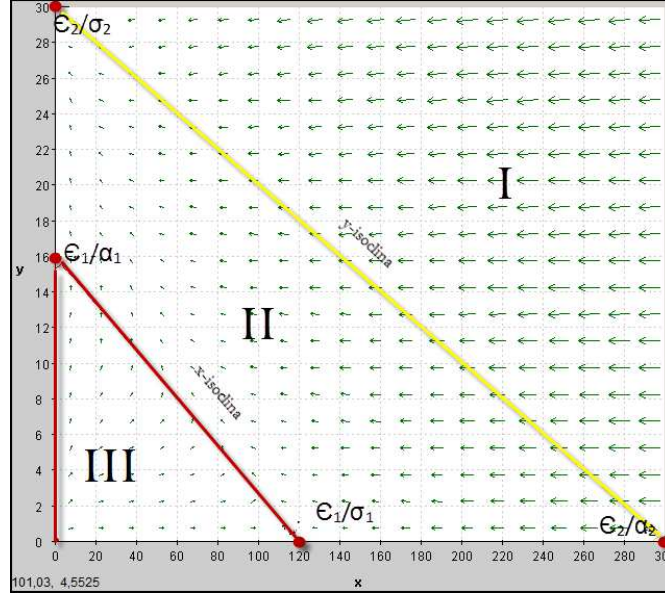


Figura 2.1.18 *Isoclinas de la extinción de la especie "x".*

Se estudia la pendiente en cada una de las tres regiones:

A. En la región *I* se toma el punto P_1 de abscisa $x_1 = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$ y ordenada $y_1 > 0$.

Se calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_1 - \alpha_1 y_1 \\
 &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= \left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2 - \sigma_1 \epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= \frac{\sigma_1}{\sigma_1} \left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2 - \sigma_1 \epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_1 \alpha_2 - \sigma_1 \epsilon_2}{\sigma_1 \alpha_2} \right) - \alpha_1 y_1 \\
 &= \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \alpha_1 y_1 < 0.
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{dx}{dt} < 0$.

Teorema 2.3 (Criterio de la derivada) Sea f una función continua en el intervalo $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo (a, b) :

$\langle i \rangle$ si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b) , entonces f es creciente en $[a, b]$.

$\langle ii \rangle$ si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) , entonces f es decreciente en $[a, b]$.

Siendo así en esta región la pendiente de las trayectorias es positiva, y la orientación de las mismas en función del tiempo es de derecha a izquierda.

En la y – *isoclina* se tiene $\frac{dx}{dt} < 0$, así que las trayectorias están orientadas hacia la izquierda.

B. En la región II se toma el punto P_2 de abscisa $x_2 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ y de ordenada la tercera parte de la imagen de x_2 por la y – *isoclina*, de forma que $y_2 = \frac{\alpha_2}{3\sigma_2} \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right)$.

Se calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_2 - \alpha_1 y_2 \\ &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) - \alpha_1 y_2 \\ &= -\alpha_1 y_2 < 0.\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dx}{dt} < 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_2 - \alpha_2 x_2 \\
&= \epsilon_2 - \sigma_2 \left[\frac{\alpha_2}{3\sigma_2} \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \right] - \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \\
&= \epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} - \sigma_2 \left[\frac{\alpha_2}{3\sigma_2} \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \right] \\
&= \left(\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) - \frac{\alpha_2}{3} \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} - \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \right) \\
&= \left(\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) - \frac{\alpha_2}{3} \left(\frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \alpha_2}{\alpha_2 \sigma_1} \right) \\
&= \left(\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) - \frac{1}{3} \left(\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) \\
&= \frac{2}{3} \left(\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} \right) > 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$.

Siendo así en esta región la pendiente es negativa, y la orientación de las mismas hacia arriba y hacia la izquierda, según los signos de las derivadas.

En la región x - *isoclina* se tiene $\frac{dy}{dt} > 0$, así que la pendiente esta orientada hacia arriba.

C. En la región *III* se toma el punto P_3 de abscisa $x_3 = \frac{\epsilon_1}{3\sigma_1}$, y de ordenada la mitad de la imagen de x_3 por la x - *isoclina*, de forma que $y_3 = \frac{\epsilon_1}{9\alpha_1}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (y(x_3)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} - \frac{\sigma_1}{\alpha_1} \left(\frac{\epsilon_1}{3\sigma_1} \right) \right) \\
&= \frac{\epsilon_1}{3\alpha_1}.
\end{aligned}$$

Se calcula el signo $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_3 - \alpha_1 y_3 \\ &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_1}{3\sigma_1} \right) - \alpha_1 \left(\frac{\epsilon_1}{3\alpha_1} \right) \\ &= \frac{\epsilon_1}{3} > 0.\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dx}{dt} > 0$.

También así,

$$\begin{aligned}\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_3 - \alpha_2 x_3 \\ &= \epsilon_2 - \sigma_2 \left(\frac{\epsilon_1}{3\alpha_1} \right) - \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_1}{3\sigma_1} \right) \\ &= \epsilon_2 - \frac{\alpha_2}{3} \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\sigma_2}{3} \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \\ &> \epsilon_2 - \frac{\alpha_2}{3} \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} - \frac{\sigma_2}{3} \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \\ &= \frac{\epsilon_2}{3} > 0.\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$,

de forma que en esta región la pendiente es positiva y la orientación de las mismas es hacia arriba y hacia la derecha, según los signos de las derivadas.

Por tanto las trayectorias tienden asintóticamente hacia el punto $\left(0, \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right)$, es decir que la especie “ x ” se extingue, independientemente de las condiciones iniciales. Esto significa que la especie “ y ” alcanza el valor correspondiente a su capacidad de soporte

$$K = \frac{\epsilon_2}{\sigma_2},$$

de acuerdo a la ecuación logística que gobierna su comportamiento cuando $x = 0$.

Ahora se supone en segundo lugar que la x – *isoclinas* está por encima de la y – *isoclinas*. Se divide al interior del primer cuadrante también en tres regiones llamadas I , II y III .

Se visualiza la siguiente gráfica con los valores $\epsilon_1 = 22$, $\sigma_1 = 0,1$, $\alpha = 0.75$, $\epsilon_2 = 1.5$, $\sigma_2 = 0.1$ y $\alpha_2 = 0.01$.

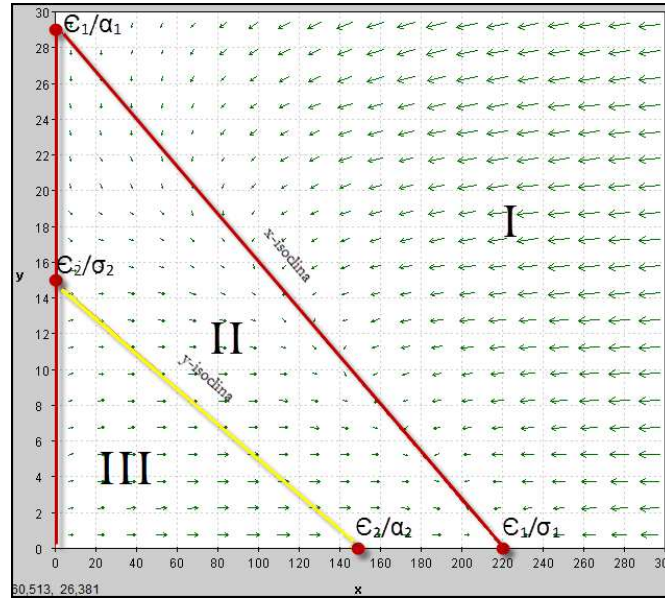


Figura 2.1.19 *Isoclinas de la extinción de la especie "y".*

Se estudiará la pendiente en cada una de las tres regiones:

A. En la región *I* se toma el punto P_1 de abscisa $x_1 = \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ y ordenada $y_1 > 0$. Se calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

Por tanto en esta región la pendiente es positiva, y la orientación de las mismas en función del tiempo es de derecha a izquierda. En la x -isocline se tiene $\frac{dy}{dt} < 0$, así que las trayectorias están orientadas hacia la izquierda.

B. En la región *II* se toma el punto P_2 de abscisa $x_2 = \frac{\epsilon_2}{\alpha_2}$, y de ordenada la tercera parte de la imagen de x_2 por la x -isocline, de forma que $y_2 = \frac{\sigma_1}{3\alpha_1} \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right)$.

Se calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_2 - \alpha_1 y_2 \\
 &= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) - \alpha_1 \left[\frac{\sigma_1}{3\alpha_1} \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) \right] \\
 &= \frac{\sigma_1}{3} \left(\epsilon_1 - \frac{\sigma_1 \epsilon_2}{\alpha_2} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_2 - \alpha_2 x_2 \\
 &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_2 - \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} \right) \\
 &= -\sigma_2 y_2 < 0.
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} < 0$.

Por tanto en esta región la pendiente de las trayectorias es negativa, y la orientación de las mismas hacia arriba y hacia la izquierda, según los signos de las derivadas.

En la región $y - isoclina$ se tiene $\frac{dy}{dt} > 0$, así que las trayectorias están orientadas hacia arriba.

C. En la región *III* se toma el punto P_3 de abscisa $x_3 = \frac{\epsilon_2}{3\alpha_2}$, y de ordenada la tercera parte de la imagen de x_3 por la $y - isoclina$, de forma que $y_3 = \frac{\epsilon_2}{3\sigma_2}$. Se

calcula el signo de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (y(x_3)) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \left(\frac{\epsilon_2}{3\alpha_2} \right) \right) \\
 &= \frac{\epsilon_2}{3\sigma_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y &= \epsilon_1 - \sigma_1 x_3 - \alpha_1 y_3 \\
&= \epsilon_1 - \sigma_1 \left(\frac{\epsilon_2}{3\alpha_2} \right) - \alpha_1 \left(\frac{\epsilon_2}{3\sigma_2} \right) \\
&> \epsilon_1 - \frac{\sigma_1}{3} \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_1}{3} \frac{\epsilon_1}{\alpha_1} \\
&= \frac{\epsilon_1}{3} > 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$,

y así,

$$\begin{aligned}
\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x &= \epsilon_2 - \sigma_2 y_3 - \alpha_2 x_3 \\
&= \epsilon_2 - \sigma_2 \left(\frac{\epsilon_2}{3\sigma_2} \right) - \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_2}{3\alpha_2} \right) \\
&= \frac{\epsilon_2}{3} > 0.
\end{aligned}$$

Entonces $\frac{dy}{dt} > 0$.

En esta región la pendiente de las trayectorias es positiva y la orientación de las mismas es hacia arriba y hacia la derecha, según los signos de las derivadas.

La única posibilidad, por tanto, es que todas las trayectorias tiendan asintóticamente hacia el punto $\left(\frac{\epsilon_1}{\alpha_1}, 0 \right)$, es decir que la especie “ y ” se extingue, independientemente de las condiciones iniciales. Esto significa que la especie “ x ” alcanza el valor correspondiente a su capacidad de soporte

$$K = \frac{\epsilon_1}{\alpha_1},$$

de acuerdo a la ecuación logística que gobierna su comportamiento cuando $y = 0$. Es decir, que en ambas situaciones se extingue la especie de la isoclina que está por debajo de la otra en el plano fase, independiente de las poblaciones iniciales de las mismas. La especie cuya isoclina está por encima se llama **dominante**.

Caso 3. Las isoclinas tienen una intersección única en el interior del primer cuadrante.

El punto de corte de las isoclinas, $G(X, Y)$ es un punto de equilibrio de (2.9).

Se visualiza la siguiente gráfica con los valores $\epsilon_1 = 12$, $\sigma_1 = 0,04$, $\alpha = 0,75$, $\epsilon_2 = 3$, $\sigma_2 = 0,1$ y $\alpha_2 = 0,03$.

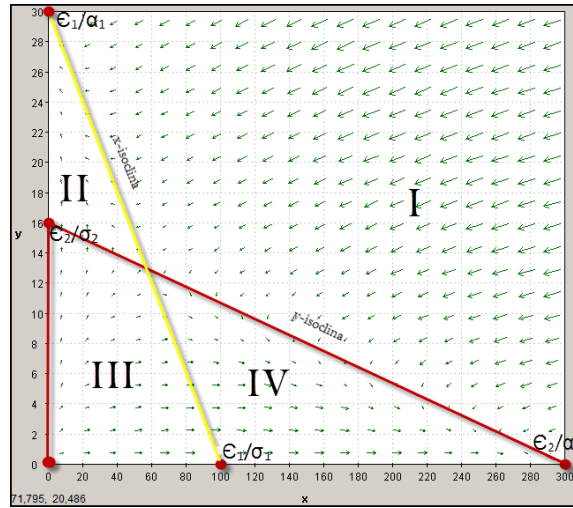


Figura 2.1.20 *Isoclina con punto de intersección.*

Se toma:

$$\epsilon_1 = \sigma_1 x + \alpha_1 y.$$

Al despejar “ x ”:

$$x = \frac{\epsilon_1 - \alpha_1 y}{\sigma_1},$$

y se reemplaza en

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= \alpha_2 x + \sigma_2 y \\ &= \alpha_2 \left(\frac{\epsilon_1 - \alpha_1 y}{\sigma_1} \right) + \sigma_2 y \\ &= \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2 \alpha_1 x}{\sigma_1} + \sigma_2 y. \end{aligned}$$

De forma análoga al despejar, “ y ”

$$\begin{aligned}\epsilon_2 - \frac{\alpha_2 \epsilon_1}{\alpha_1} &= \sigma_2 y - \frac{\alpha_2 \alpha_1 y}{\sigma_1} \\ \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \alpha_2 \epsilon_1}{\sigma_1} &= y \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_2 \alpha_1}{\sigma_1} \right) \\ y &= \frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2}.\end{aligned}$$

Ahora se reemplaza “ y ” en $\epsilon_1 - \alpha_1 y = \sigma_1 x$ y se despeja “ x ”:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 - \alpha_1 \left(\frac{\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2} \right) &= \sigma_1 x \\ \frac{\epsilon_1 \sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \epsilon_2 \sigma_1}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2} &= \sigma_1 x,\end{aligned}$$

de donde

$$x = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \alpha_1 \epsilon_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2}.$$

Y así

$$X = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 - \alpha_1 \epsilon_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2} \quad ; \quad Y = \frac{\sigma_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2} \quad (2.10)$$

Para estudiar este caso se procede a la linealización de la ecuación (2.9).

Para ello se utiliza

$$\begin{aligned}F(x, y) &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y), \\ G(x, y) &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x).\end{aligned}$$

Se halla sus respectivas derivadas.

$$\begin{aligned}F_x(X, Y) &= \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y, & F_y(X, Y) &= -\alpha_1 X \\ G_x(X, Y) &= -\alpha_2 Y, & G_y(X, Y) &= \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} F_x(X, Y) & F_y(X, Y) \\ G_x(X, Y) & G_y(X, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Además, dado que $\epsilon_1 - \sigma_1 X - \alpha_1 Y = 0$ y $\epsilon_2 - \sigma_2 Y - \alpha_2 X = 0$, la ecuación anterior se reduce de inmediato a

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 X & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & -\sigma_2 Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Se halla los correspondientes valores propios de la matriz,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 X - \lambda & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & -\sigma_2 Y - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (-\sigma_1 X - \lambda)(-\sigma_2 Y - \lambda) - (-\alpha_2 Y)(-\alpha_1 X) \\ &= \sigma_1 \sigma_2 XY + \lambda \sigma_1 X + \lambda \sigma_2 Y + \lambda^2 - \alpha_1 \alpha_2 XY \\ &= \lambda^2 + \lambda(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) + \sigma_1 \sigma_2 XY - \alpha_1 \alpha_2 XY \end{aligned}$$

Los valores propios se determinan a partir de la ecuación

$$\lambda^2 + \lambda(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) + (\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2) XY = 0$$

Por tanto,

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 X + \sigma_2 Y) \pm \sqrt{(\sigma_1 X + \sigma_2 Y)^2 - 4(\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2) XY}}{2}$$

Se tiene que $r < 0$; pero para $r > 0$ se presentan las siguientes situaciones:

I. Si $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 > 0$ entonces $r < 0$. Como ambos valores propios son negativos, se tiene que (X, Y) es un nodo estable de (2.9). Como X e Y son positivos, se debe tener que $\epsilon_1 \sigma_2 - \alpha_1 \epsilon_2 > 0$ y $\sigma_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha_2 > 0$, es decir que $\frac{\epsilon_1}{\alpha_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ y $\frac{\epsilon_2}{\alpha_2} > \frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$. De las ecuaciones (??), la primera desigualdad significa que la x -isoclina tiene una ordenada en el origen mayor que la de la y -isoclina. La segunda significa que la x -isoclina tiene una abscisa en el origen menor que la de y -isoclina.

II. Si $\sigma_1 \sigma_2 - \alpha_1 \alpha_2 < 0$ entonces $r_+ > 0$. Como hay un valor propio negativo y otro positivo, se tiene que (X, Y) es punto silla, y por tanto es un punto crítico inestable de (2.9), se debe tener que $\epsilon_1 \sigma_2 - \alpha_1 \epsilon_2 > 0$ y $\sigma_1 \epsilon_2 - \epsilon_1 \alpha_2 < 0$, lo que significa que los puntos de corte de las isoclinas con los ejes están al revés que en el caso anterior:

la x - *isoclina* tiene una ordenada en el origen menor, y una abscisa en el origen mayor que las coordenadas respectivas de la y - *isoclina*.

III. Si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0$ corresponde a $\frac{\sigma_1}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\sigma_2}$ (pendientes de las isoclinas iguales).

Ahora la condición de que X y Y sean positivas da por resultado $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$.

Por tanto, el punto crítico es asintóticamente estable. Para este caso también es posible demostrar que los otros puntos críticos $(0, 0)$, $\left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}\right)$ son inestables (Ver Tabla 1). Así, para cualquier valores iniciales positivos de x y y , las dos poblaciones tienden al estado de equilibrio de coexistencia dado por las ecuaciones (2.10). Para más detalles ver, [2].

Las ecuaciones (2.9) proporcionan la interpretación biológica del resultado de si la coexistencia ocurre o no, dependiendo de si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$ es positiva o negativa. Las σ son una medida del efecto inhibitorio que el crecimiento de cada población tiene sobre sí misma, mientras que las α son una medida del efecto en el que el crecimiento de cada población tiene sobre otra especie.

De este modo, cuando $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$, la interacción (competencia) es “debil” y las especies pueden coexistir, cuando $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$, la interacción (competencia) es “fuerte” y las especies no pueden coexistir: una de ellas debe extinguirse, [3].

2.2. Modelo depredador presa

Las poblaciones de presa y depredador se representan por x y y , respectivamente, en un tiempo t . Al construir un modelo de la interacción de las dos especies se hacen las siguientes suposiciones:

1. En ausencia del depredador, la población de la presa aumenta a una tasa proporcional a la población actual; $\frac{dx}{dt} = ax$, $a > 0$, cuando $y = 0$.

2. En ausencia de la presa, el depredador se extingue; así, $\frac{dy}{dt} = -cy$, $c > 0$, cuando $x = 0$.

3. El número de encuentros entre depredador y presa es proporcional al producto de sus poblaciones. Cada uno de tales encuentros tiende a promover el crecimiento de la población del depredador y a inhibir el crecimiento de la población de la presa. De este modo, la tasa de crecimiento de la población del depredador aumenta en un término de la forma γxy , mientras que la tasa de crecimiento de la población de la presa disminuye en el término αxy , donde γ y α son constantes positivas.

Como consecuencia de estas suposiciones, se llega a las ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x) \end{cases} \quad (2.11)$$

Las constantes a, c, α y γ son todas positivas; a y c son la tasa de crecimiento de la población de la presa y la tasa de decremento (mortalidad) del depredador, respectivamente, α y γ son medidas del efecto de la interacción entre las dos especies.

Ejemplo 2.4 *Se considera dos especies animales que interactúan en el mismo ambiente; la primera sólo come plantas y la segunda se alimenta de la primera. Se analiza las soluciones del sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1 - 0.5y) = x - 0.5xy \\ \frac{dy}{dt} = y(-0.75 + 0.25x) = -0.75y + 0.25xy, \end{cases} \quad (2.12)$$

para x y y positivas.

Los puntos críticos de este sistema son las soluciones de las ecuaciones algebraicas

$$x(1 - 0.5y) = 0 \quad , \quad y(-0.75 + 0.25x) = 0 \quad (2.13)$$

Primero se observa que $x = 0$ y $y = 0$, se obtiene así un punto crítico en $(0, 0)$.

Ahora de la ecuación $x(1 - 0.5y) = 0$ se obtiene,

$$x(1 - 0.5y) = 0$$

$$1 - 0.5y = 0$$

$$2 = y,$$

y de la ecuación $y(-0.75 + 0.25x) = 0$

$$y(-0.75 + 0.25x) = 0$$

$$-0.75 + 0.25x = 0$$

$$x = 3.$$

Como $x = 3$ y $y = 2$, se tiene un punto crítico en $(3, 2)$.

Así, se obtiene los siguientes puntos críticos: $(0, 0)$ y $(3, 2)$.

A continuación se observa el campo direccional para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado,

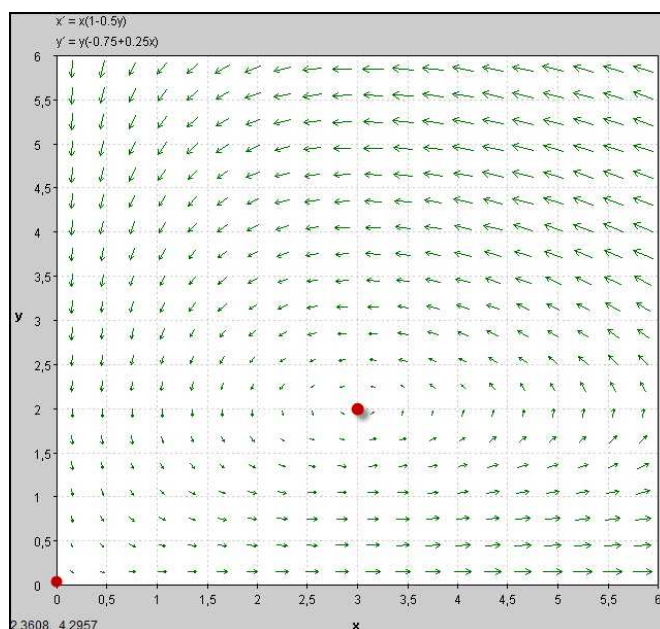


Figura 2.2.1 Campo direccional.

De donde con la ecuación (2.12), se obtiene,

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x(1 - 0.5y) &= x - 0.5xy \\ G(x, y) &= y(-0.75 + 0.25x) &= -0.75y + 0.25xy \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} F_x(x_0, y_0) &= 1 - 0.5Y & F_y(x_0, y_0) &= -0.5X \\ G_x(x_0, y_0) &= 0.25Y, & G_y(x_0, y_0) &= -0.75 + 0.25X \end{aligned}$$

donde (x_0, y_0) es un punto crítico del sistema.

De modo que el sistema lineal pasa a ser

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0.5Y & -0.5X \\ 0.25Y & -0.75 + 0.25X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Se hace un análisis para cada punto crítico

1. Para el punto crítico $x = 0, y = 0$.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

a. Valores propios y vectores propios del sistema anterior

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -0.75 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (1 - \lambda)(-0.75 - \lambda) - (0)(0) \\ &= \lambda^2 + 0.25\lambda - 0.75 \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-0.25 \pm \sqrt{0.25^2 - 4(1)(-0.75)}}{2(1)}$$

así los valores propios son:

$$r_1 = -0.75,$$

$$r_2 = 1.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -0.75$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

de donde se obtiene que

$$x = 0$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \{(x, y) \text{ , } x = 0\} \\ &= \{(0, y) \text{ , } y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.75 & 0 \end{array} \right),$$

se obtiene que

$$y = 0 \text{ ,}$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} &= \{(x, y) \text{ , } y = 0\} \\ &= \{(x, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0) \text{ , } x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

de modo que la solución general del sistema (2.12) es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}.$$

El origen es un punto silla del sistema (2.14) y del sistema no lineal (2.12) por consiguiente es un punto crítico inestable. Un par de trayectorias entran al origen a lo largo del eje “y”; las demás trayectorias salen de la vecindad del origen.

2. Para el punto crítico $x = 3$, $y = 2$.

Es posible hacer la sustitución

$$x = 3 + u \quad , \quad y = 2 + v$$

en la ecuación (2.12) y luego despreciar los términos no lineales en u y en v .

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= x - 0.5xy \\ &= (3 + u) - 0.5(3 + u)(2 + v) \\ &= -1.5v,\end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= -0.75y + 0.25xy \\ &= -0.75y + 0.25(3 + u)(2 + v) \\ &= 0.5u.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

a. Valores propios y vectores propios del sistema anterior

i. Valores propios

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1.5 \\ 0.5 & 0 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + 0.75$$

cuyas raíces son

$$\begin{aligned}r_{1,2} &= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(0.75)}}{2(1)} \\ r_{1,2} &= \frac{\pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

así los valores propios son:

$$r_1 = -\frac{\sqrt{3}i}{2},$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{3}i}{2}.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = -\frac{\sqrt{3}i}{2}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\sqrt{3}i}{2} & -1.5 & 0 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \end{array} \right).$$

Se obtiene que

$$x - 1.5y = 0$$

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}{1.5} = y$$

$$\frac{\sqrt{3}i}{3}x = y$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \left\{ (x, y) \text{ , } y = \frac{\sqrt{3}i}{3}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{\sqrt{3}i}{3}x \right) \text{ , } x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}i} \right)$.

B. Para $r_2 = 1$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\frac{\sqrt{3}i}{2} & -1.5 & 0 \\ 0.5 & -\frac{\sqrt{3}i}{2} & 0 \end{array} \right).$$

Se obtiene que

$$-\left(\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x - 1.5y = 0,$$

De donde

$$y = -\frac{\sqrt{3}i}{3}x$$

y así

$$\begin{aligned}\xi^{(2)} &= \left\{ (x, y) , y = -\frac{\sqrt{3}i}{3}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{\sqrt{3}i}{3}x \right) , x \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}i}{3} \end{pmatrix}$.

En virtud de que los valores propios son imaginarios, el punto crítico $(3, 2)$ es un centro del sistema lineal (2.15) y, por tanto, es un punto crítico estable de ese sistema.

A continuación se observa el retrato fase para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado,

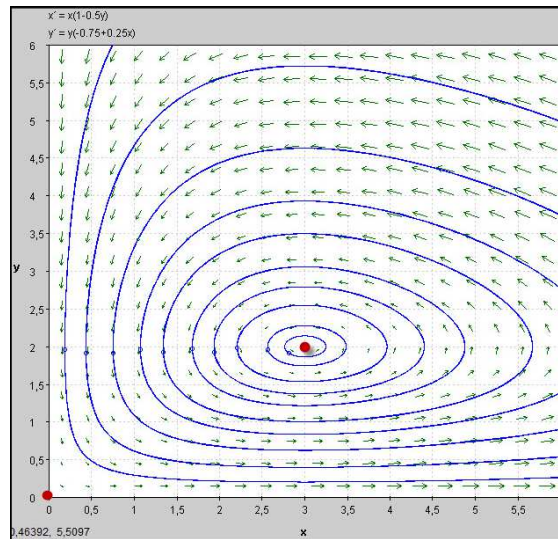


Figura 2.2.2 Retrato de fase.

La manera más sencilla de encontrar las trayectorias del sistema lineal (2.15) es dividir la segunda de las ecuaciones (2.15) entre la primera para obtener la ecuación

diferencial

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = \frac{0.5u}{-1.5v} = -\frac{u}{3v},$$

o bien

$$u du + 3v dv = 0.$$

Como consecuencia,

$$u^2 - 3v^2 = k,$$

en donde k es una constante arbitraria no negativa de integración.

Ahora, de vuelta al sistema no lineal (2.12), si se divide la segunda de las ecuaciones (2.12) entre la primera, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0.75 + 0.25x)}{x(1 - 0.5y)}.$$

La ecuación anterior es una ecuación separable y es posible ponerla en la forma

$$\frac{1 - 0.5y}{y} dy = \frac{-0.75 + 0.25x}{x} dx,$$

a partir de la cual se concluye que

$$0.75 \ln(x) + \ln(y) - 0.5y - 0.25x = c,$$

en donde c es una constante de integración. Aunque la ecuación no se puede resolver explícitamente para cualquiera de las variables en términos de la otra, es posible demostrar que la gráfica de la ecuación para un valor fijo de c es una curva cerrada que rodea el punto crítico $(3, 2)$. Así entonces, el punto crítico también es un centro del sistema (2.12) y las poblaciones del depredador y de la presa muestran una variación cíclica.

El sistema general (2.11) se puede analizar exactamente de la misma manera que en el ejemplo anterior. Los puntos críticos del sistema (2.11) son las soluciones de: λ

$$x(a - \alpha y) = 0 \quad , \quad y(-c + \gamma x) = 0 \quad ,$$

es decir, los puntos $(0, 0)$ y $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Se analizarán primero las soluciones del sistema lineal correspondiente cerca de cada punto crítico.

En la vecindad del origen se desprecian los términos no lineales de las ecuaciones (2.11) para obtener el sistema lineal correspondiente; a saber,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los valores propios y vectores propios son

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (a - \lambda)(-c - \lambda) - (0)(0) \\ &= -ac - a\lambda + c\lambda + \lambda^2 \\ &= \lambda^2 + \lambda(c - a) - ac, \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \frac{-(c - a) \pm \sqrt{(c - a)^2 - 4(1)(-ac)}}{2(1)}.$$

Los valores y vectores propios correspondientes son

$$r_1 = a, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -c, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}.$$

Por tanto, el origen es un punto silla y, en consecuencia, inestable. La entrada al punto silla es a lo largo de la recta $x = 0$; todas las demás trayectorias salen de la vecindad del punto crítico.

A continuación, se considera el punto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Si $x = \left(\frac{c}{\gamma}\right) + u$ y $y = \left(\frac{a}{\alpha}\right) + v$,

$$\begin{aligned}
x(a - \alpha y) &= \left(\left(\frac{c}{\gamma} \right) + u \right) \left(a - \alpha \left(\left(\frac{a}{\alpha} \right) + v \right) \right) \\
&= \left(\frac{c}{\gamma} + u \right) (-\alpha v) \\
&= \frac{-\alpha c}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
y(-c + \gamma x) &= \left(\left(\frac{a}{\alpha} \right) + v \right) \left(-c + \gamma \left(\left(\frac{c}{\gamma} \right) + u \right) \right) \\
&= \frac{a}{\alpha} (\gamma u) + v (\gamma u) \\
&= \frac{a\gamma}{\alpha} u, \quad \text{si } v = 0, u = 1
\end{aligned}$$

y el sistema lineal correspondiente es

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Los valores y vectores propios son del sistema anterior

i. Valores propios,

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -\frac{\alpha c}{\gamma} \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & 0 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Así

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 + ac,$$

cuyas raíces son

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{aci}.$$

ii. El vector propio asociado a cada valor propio es:

A. Para $r_1 = \sqrt{aci}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\sqrt{aci} & -\frac{\alpha c}{\gamma} & 0 \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & -\sqrt{aci} & 0 \end{array} \right),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} -\sqrt{aci}x - \frac{\alpha c}{\gamma}y &= 0, \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x &= y, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(1)} &= \left\{ (x, y) \text{ , } y = -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x \right) \text{ , } x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \end{pmatrix}$.

B. Para $r_2 = -\sqrt{aci}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{aci} & -\frac{\alpha c}{\gamma} & 0 \\ \frac{\gamma a}{\alpha} & \sqrt{aci} & 0 \end{array} \right),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} \sqrt{aci}x - \frac{\alpha c}{\gamma}y &= 0, \\ \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x &= y, \end{aligned}$$

y así

$$\begin{aligned} \xi^{(2)} &= \left\{ (x, y) \text{ , } y = \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x \right\} \\ &= \left\{ \left(x, \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x \right) \text{ , } x \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Entonces el vector propio asociado es $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \end{pmatrix}$

Los valores propios del sistema (2.16) son $r_{1,2} = \pm\sqrt{aci}$, por lo que el punto crítico es un centro (estable) del sistema lineal. Para hallar las trayectorias del sistema (2.16)

se puede dividir la segunda ecuación entre la primera para obtener

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}} = -\frac{\left(\frac{\gamma a}{\alpha}\right) u}{\left(\frac{\alpha c}{\gamma}\right) v},$$

o bien,

$$\left(\frac{\gamma a}{\alpha}\right) u du + \left(\frac{\alpha c}{\gamma}\right) v dv = 0.$$

Como consecuencia,

$$\left(\frac{\gamma a}{\alpha}\right) u^2 + \left(\frac{\alpha c}{\gamma}\right) v^2 = k,$$

en donde k es una constante no negativa de integración. Por tanto, las trayectorias del sistema lineal (2.16) son elipses, como en el ejemplo, y el punto crítico $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ en un centro. Si se regresa brevemente al sistema no lineal (2.11), obsérvese que es posible reducir a la simple ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)}. \quad (2.17)$$

La (2.17) es separable y tiene la solución

$$a \ln(y) - \alpha y + c \ln(x) - \gamma x = C, \quad (2.18)$$

en donde C es una constante de integración. Una vez más, es posible demostrar que la gráfica de la ecuación (2.18), para C fija, es una curva cerrada que rodea al punto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$. Por tanto, este punto crítico también es un centro para el sistema no lineal general (2.11).

La variación cíclica de las poblaciones de depredadores y presas se puede analizar con más detalle cuando las desviaciones con respecto al punto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$ son pequeñas y es posible usar el sistema lineal (2.16).

Se tiene que

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha c} \\ -\frac{\gamma \sqrt{aci}}{\alpha c} x \end{pmatrix} e^{\sqrt{aci}t}, \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha c} \\ \frac{\gamma \sqrt{aci}}{\alpha c} x \end{pmatrix} e^{-\sqrt{aci}t},$$

y por tanto

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c}x \end{pmatrix} (\cos \sqrt{act} + i \sin \sqrt{act})$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{act} \\ \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \sin \sqrt{act} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin \sqrt{act} \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \cos \sqrt{act} \end{pmatrix}.$$

Así se obtiene

$$u(t) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{act} \\ \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \sin \sqrt{act} \end{pmatrix}, \quad v(t) = \begin{pmatrix} \sin \sqrt{act} \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \cos \sqrt{act} \end{pmatrix}.$$

De modo que la solución general del sistema (2.16) es:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos \sqrt{act} \\ \frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \sin \sqrt{act} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin \sqrt{act} \\ -\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \cos \sqrt{act} \end{pmatrix},$$

de donde

$$u = c_1 (\cos \sqrt{act}) + c_2 (\sin \sqrt{act})$$

$$v = c_1 \left(\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \sin \sqrt{act} \right) - c_2 \left(\frac{\gamma\sqrt{aci}}{\alpha c} \cos \sqrt{act} \right)$$

Si se usa

$$\frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi) = \frac{c}{\gamma} K (\cos \sqrt{act} \cos \phi) - \frac{c}{\gamma} K (\sin \sqrt{act} \sin \phi)$$

$$\frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi) = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K (\sin \sqrt{act} \cos \phi) + \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K (\sin \phi \cos \sqrt{act}).$$

La solución del sistema (2.16) puede escribirse en la forma

$$u = \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{act} + \phi), \quad v = \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{c}{a}} K \sin(\sqrt{act} + \phi),$$

en donde las constantes K y ϕ quedan determinadas por las condiciones iniciales. Por tanto,

$$\begin{aligned}x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma}K \cos(\sqrt{act} + \phi) \\y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}}K \sin(\sqrt{act} + \phi).\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son válidas para las trayectorias elípticas cercanas al punto $\left(\frac{c}{\gamma}, \frac{a}{\alpha}\right)$; es posible aplicarlas para sacar varias conclusiones con respecto a la variación cíclica del depredador y la presa sobre esas trayectorias.

1. Los tamaños de las poblaciones del depredador y la presa varían sinusoidalmente con periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{ac}}$; este periodo de oscilación es independiente de las condiciones iniciales.
2. Las poblaciones del depredador y la presa están desfasadas en un cuarto de ciclo; la de la presa va adelante y la del depredador atrás, como se explicó en el ejemplo.
3. Las amplitudes de las oscilaciones son $\frac{Kc}{\gamma}$ para la presa y $a\sqrt{c}\frac{K}{\alpha}\sqrt{a}$ para el depredador y, por tanto, dependen de las condiciones iniciales, así como de los parámetros del problema.
4. Las poblaciones promedio del depredador y de la presa en un ciclo completo con $\frac{c}{\gamma}$ y $\frac{a}{\alpha}$, respectivamente; estas son las mismas que las poblaciones de equilibrio.

2.3. Modelo Competencia de Especies: La Ballena Azul y la Ballena de Aleta

Se presenta el siguiente modelo de Competencia de Especies, el cual fue el desarrollo de un trabajo abordado por el director del proyecto junto con Paula Vargas, Laura

García y Lorena Parra estudiantes de la materia Modelos Matemáticos (2009), de la Universidad Nacional bajo la dirección del profesor Hernán Estrada (QEPD).

La ballena azul y la ballena de aleta son dos especies similares que habitan en las mismas áreas. Por lo tanto, están en competencia. La tasa de crecimiento intrínseco, se estima en cinco por ciento por año para la ballena azul y ocho por ciento para la ballena de aleta. La capacidad de carga del medio ambiente (el número máximo de ballenas que el medio ambiente puede soportar) se estima en 150000 azules y 400000 de aleta. La medida en que las ballenas compiten es desconocida. En los últimos 100 años una intensa caza de ballenas ha reducido la población en alrededor de 5000 ballenas azules y 70000 de aleta. ¿La ballena azul se extinguirá?

En el problema anterior de las ballenas, se usa un modelo logístico de crecimiento de la población, donde la tasa de crecimiento de la población P en la ausencia de competencia entre especies es,

$$g(P) = rp - aP^2$$

En este se usa el simple modelo de crecimiento,

$$g(P) = rP$$

En este estudio se presenta una interacción competitiva de dos especies que compiten por los recursos de alimento, agua, luz y espacio en un ecosistema. El uso de uno de estos recursos por parte de una población, inhibe la habilidad de sobrevivir y crecer de la otra.

Las ballenas azules (*Balaenoptera musculus*) y las ballenas de aleta (*Balaenoptera Physalus*) se convirtieron en un punto de controversia.

Los ambientalistas opinaban que la competencia de ballenas amenazaba a estos animales con una inminente extinción de alguna de las dos especies.

Variables:

- A : Número de ballenas azules
 F : Número de ballenas de aleta.
 t : Tiempo
 α : Tasa de crecimiento intrínseco anual de la ballena azul
 β : Tasa de crecimiento intrínseco anual de la ballena de aleta.
 K : Número máximo de ballenas azules que el ambiente puede soportar.
 H : Número máximo de ballenas de aleta que el ambiente puede soportar.
 g_1 : Coeficiente de competencia de la ballena azul sobre la ballena de aleta.
 g_2 : Coeficiente de competencia de la ballena de aleta sobre la ballena azul.
 A_0 : Número de ballenas azules, actualmente.
 F_0 : Número de ballenas de aleta, actualmente.

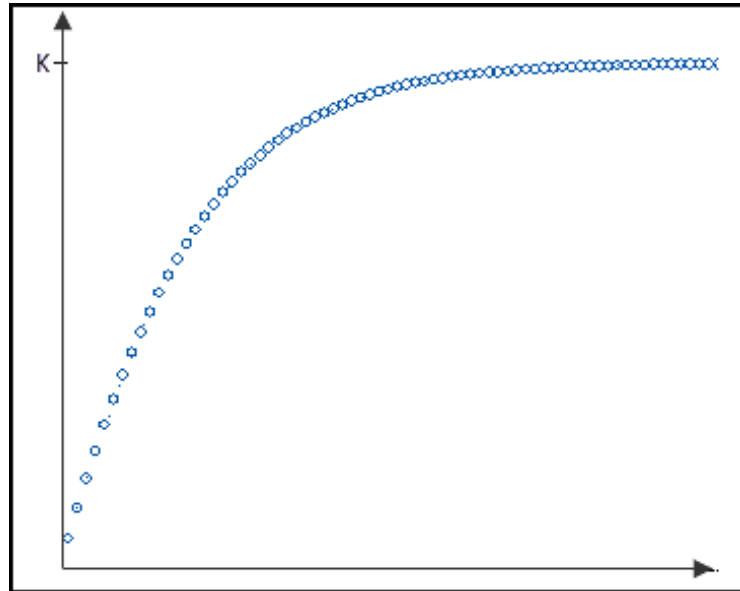


Figura 3.1 *Máximo de ballenas azules que el ambiente puede soportar.*

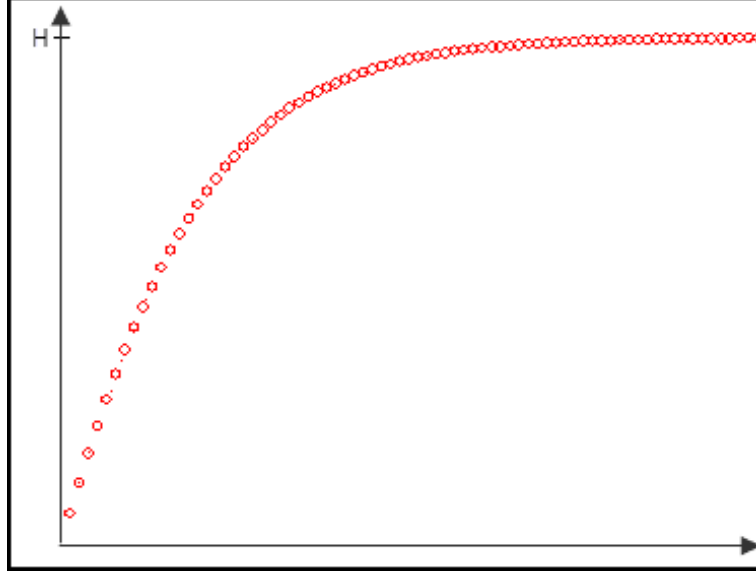


Figura 3.2 *Máximo de ballenas de aleta que el ambiente puede soportar.*

$$\begin{array}{ll} \alpha : 0.05 & H : 400000 \\ \beta : 0.08 & A_0 : 5000 \\ K : 150000 & F_0 : 70000 \end{array}$$

En el caso en que entre las especies no exista ninguna interacción, el modelo presenta un comportamiento logístico de la siguiente manera:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\alpha}{K} A (K - A) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{0.05}{150000} A (150000 - A)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\beta}{H} F (H - F) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{0.08}{400000} F (400000 - F).$$

En el caso en el que se presenta interacción entre las especies el modelo de competición de Lotka-Volterra está dado por:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\alpha}{K} A (K - A - g_1 F) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{0.05}{150000} A (150000 - A - g_1 F)$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\beta}{H} F (H - F - g_2 A) \quad \frac{dF}{dt} = \frac{0.08}{400000} F (400000 - F - g_2 A).$$

Se presenta el campo direccional y retrato de fase para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado

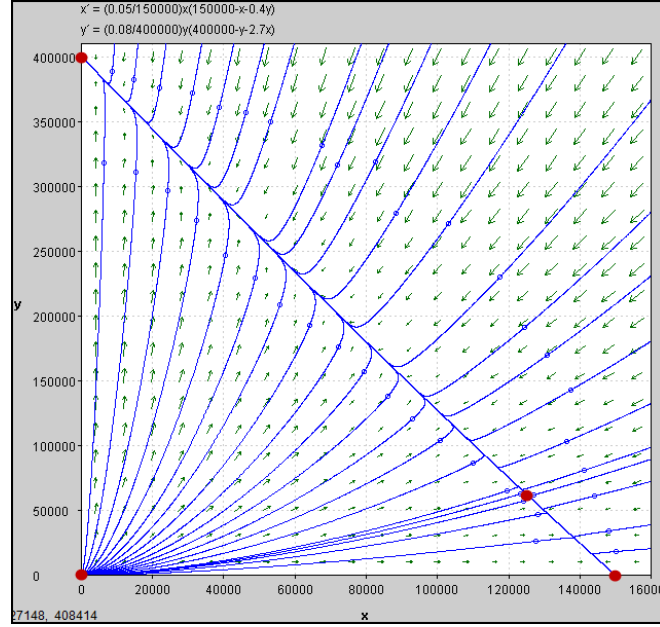


Figura 3.3 *Campo direccional y retrato fase.*

Para observar la coexistencia de las especies, analizamos los puntos críticos en el siguiente sistema:

$$\frac{\alpha}{K}A(K - A - g_1F) = 0 \quad \frac{0.05}{150000}A(150000 - A - g_1F) = 0$$

$$\frac{\beta}{H}F(H - F - g_2A) = 0 \quad \frac{0.08}{400000}F(400000 - F - g_2A) = 0.$$

Este sistema tiene puntos críticos en:

$$(0, 0) \quad ; (K, 0) \quad ; (0, H)$$

$$(0, 0) \quad ; (150000, 0) \quad ; (0, 400000)$$

Cuando $g_1g_2 \neq 0$, las líneas $K - A - g_1F = 0$ y $H - F - g_2A = 0$, se intersecan para producir un cuarto punto crítico, que depende de los valores de g_1 y g_2 , luego

tenemos cuatro casos:

$$\text{CASO 1: } g_1 > \frac{K}{H} \quad y \quad g_2 > \frac{H}{K}$$

$$\text{CASO 2: } g_1 < \frac{K}{H} \quad y \quad g_2 < \frac{H}{K}$$

$$\text{CASO 3: } g_1 > \frac{K}{H} \quad y \quad g_2 < \frac{H}{K}$$

$$\text{CASO 4: } g_1 < \frac{K}{H} \quad y \quad g_2 > \frac{H}{K}$$

donde

$$\frac{K}{H} = \frac{150000}{400000} = \frac{3}{8} = 0,375, \quad \frac{H}{K} = \frac{400000}{150000} = \frac{8}{3} = 2,66.$$

No se consideran los dos ultimos casos ya que no existe interseccion en el primer cuadrante.

En el segundo caso se dice que las especies compiten débilmente, y en este caso el modelo predice la coexistencia de las dos especies.

Para el primer caso, se dice que la competencia es fuerte y depende de las condiciones iniciales saber que especie sobrevive.

Para clasificar cada punto de equilibrio se analizará la matriz jacobiana del sistema.

$$g'(A, F) = \begin{pmatrix} \alpha \left(1 - A \frac{2}{K} - F \frac{g_1}{K} \right) & -A g_1 \frac{\alpha}{K} \\ -F g_2 \frac{\beta}{H} & \beta \left(1 - F \frac{2}{H} - A \frac{g_2}{H} \right) \end{pmatrix}.$$

Se toma valores arbitrarios que cumplan cada una de las condiciones.

2.3.1. Caso 1

Sean, $g_1 = 0.4 > 0.375$ y $g_2 = 2.7 > 0.266$ se evalua en $K - A - g_1 F = 0$ y $H - F - g_2 A = 0$, se tiene punto de corte en, de donde:

$$150000 - A - 0.4F = 0,$$

se despeja A

$$150000 - 0.4F = A,$$

se sustituye en $400000 - F - 2.7A = 0$ y se despeja F .

$$\begin{aligned} 400000 - F - 2.7A &= 0 \\ 400000 - F - 2.7(150000 - 0.4F) &= 0 \\ F &= 62500. \end{aligned}$$

Ahora se reemplaza en $A = 150000 - 0.4F$,

$$\begin{aligned} 150000 - 0.4F &= A \\ 150000 - 0.4(62500) &= A \\ 125000 &= A, \end{aligned}$$

se obtiene por consiguiente que

$$\begin{aligned} A &= 125000 \\ F &= 62500. \end{aligned}$$

Al evaluar el determinante de la matriz jacobiana en los cuatro puntos críticos obtenemos:

I. Para el punto crítico $(0,0)$, en donde corresponde a un estado en el que ambas especies de ballenas mueren, se obtiene la matriz

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Se halla el determinante de esta matriz.

$$\begin{aligned} \det(g'(0,0)) &= (0.05)(0.08) - (0)(0) \\ &= 0.004, \end{aligned}$$

así,

$$\det(g'(0,0)) = 0.004.$$

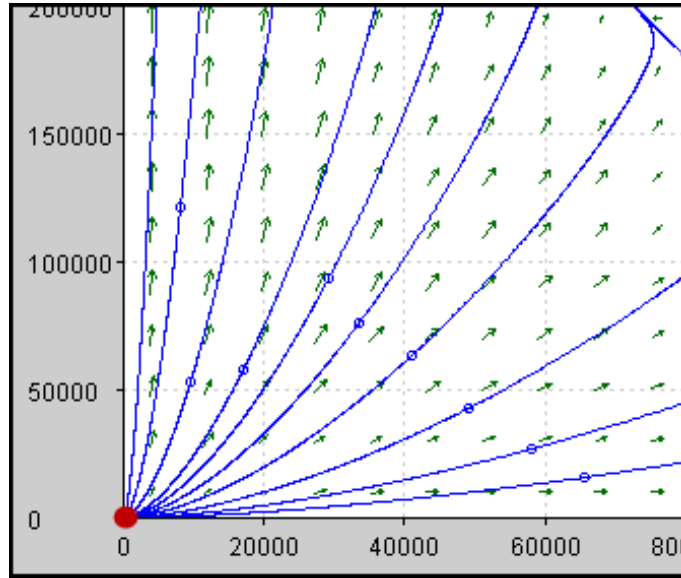


Figura 3.4 Trayectoria en el punto crítico $(0, 0)$.

El origen es un nodo inestable; en la vecindad del origen, todas las trayectorias son tangentes al eje “ y ”, como se observa en la gráfica.

II. Para el punto crítico $(150000, 0)$, en donde corresponde a un estado en el que una de las especies de ballenas sobrevive y la otra muere, se tienen la matriz.

$$g'(150000, 0) = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.02 \\ 0 & -0.001 \end{pmatrix}.$$

Se halla su determinante.

$$\begin{aligned} \det(g'(150000, 0)) &= (-0.05)(-0.001) - (0)(-0.02) \\ &= 5 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

así,

$$\det(g'(150000, 0)) = 0.0005.$$

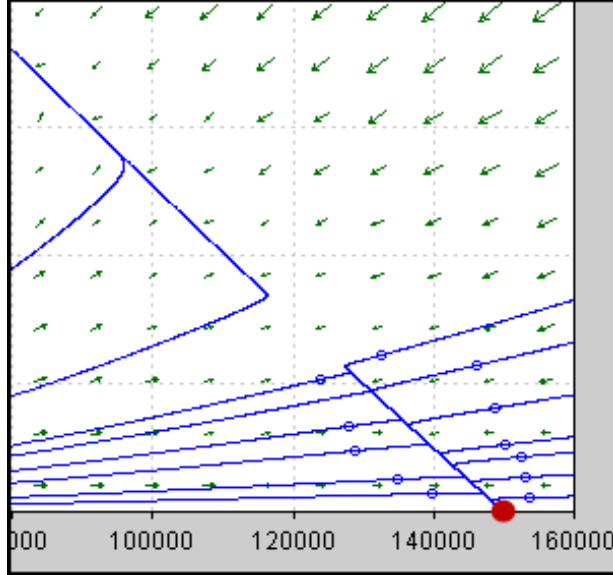


Figura 3.5 *Trayectoria en el punto crítico*
(150000, 0).

El punto (150000, 0) es un punto estable del sistema, se observa que un par de trayectorias tienden al punto crítico “x”.

III. Para el punto crítico (0, 400000), en donde corresponde a un estado en el que una de las especies de ballena sobrevive y la otra muere, se obtiene la matriz

$$g'(0, 400000) = \begin{pmatrix} 0.00332 & 0 \\ 0.216 & 0.08 \end{pmatrix},$$

se halla su determinante.

$$\begin{aligned} \det(g'(0, 400000)) &= (0.00332)(0.08) - (0.216)(0) \\ &= 2.4 \times 10^{-4}, \end{aligned}$$

así

$$\det(g'(0, 400000)) = 0.00024.$$

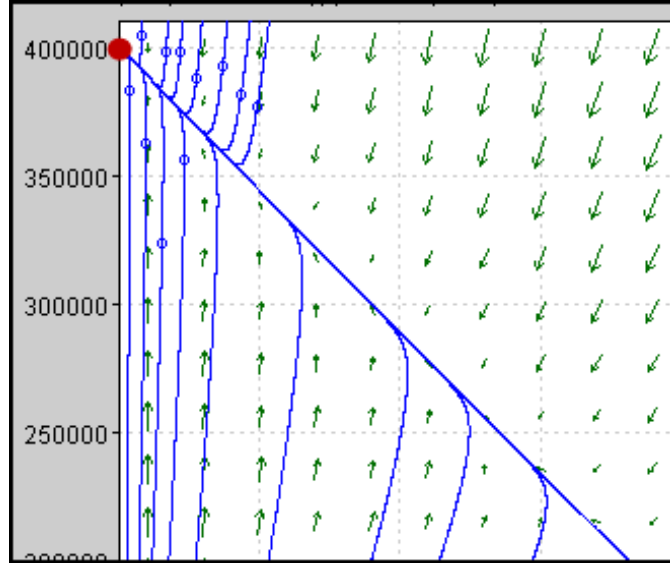


Figura 3.6 *Trayectoria en el punto crítico*
(0, 400000).

El punto (0, 400000) es un punto estable del sistema, se observa que un par de trayectorias tienden al punto crítico "y".

IV. Para el punto crítico (125000, 62500), en donde corresponde a un estado en el que ambas de las especies de ballenas sobreviven se tiene la matriz,

$$g'(125000, 62500) = \begin{pmatrix} -0.0415 & -0.0166 \\ 0.0337 & -0.0125 \end{pmatrix}.$$

Se halla su determinante

$$\begin{aligned} \det(g'(125000, 62500)) &= (-0.0415)(-0.0125) - (0.0337)(-0.0166) \\ &= 1.0821 \times 10^{-3}, \end{aligned}$$

así

$$\det(g'(125000, 62500)) = 0.0010821.$$

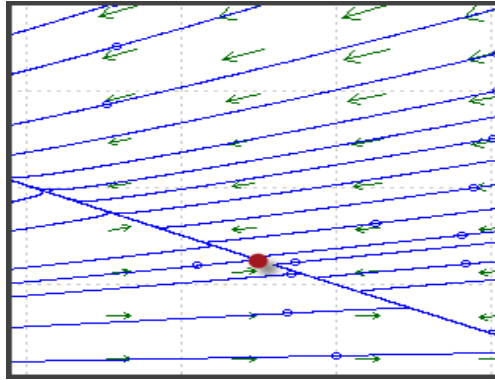


Figura 3.7 *Trayectoria en el punto crítico (125000, 62500).*

El punto (125000, 62500) es un punto estable del sistema.

Se presenta las nuliclinas para el sistema de ecuaciones diferenciales empleado,

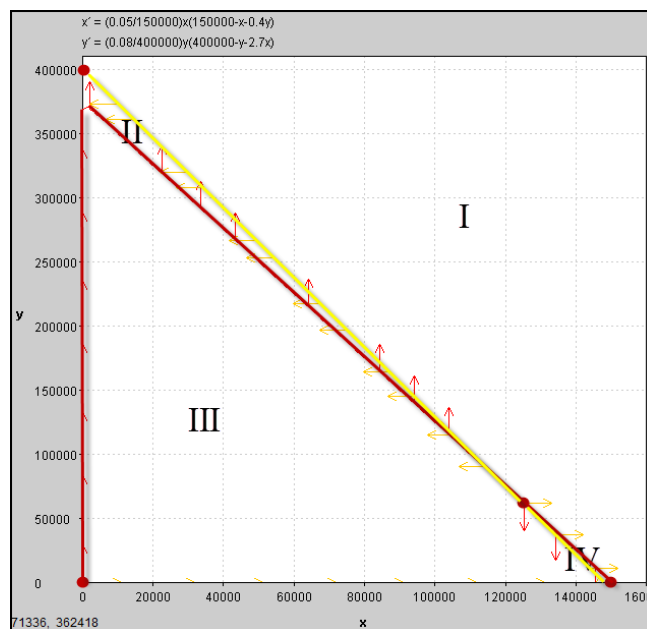


Figura 3.8 *Nuliclinas.*

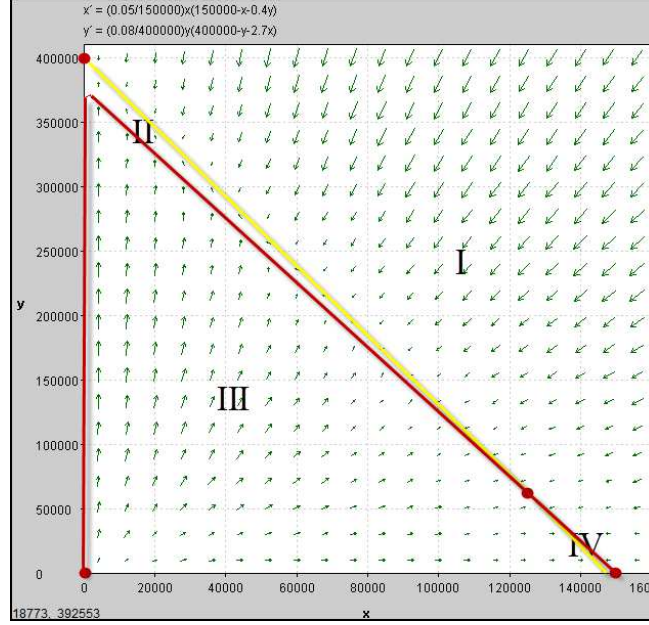


Figura 3.9 *Nuliclinas con campo direccional.*

2.3.2. Caso 2

Sean, $g_1 = 0.3111 < 0.375$ y $g_2 = 2.61029 < 2.666$ se evalua en $K - A - g_1F = 0$ y $H - F - g_2A = 0$, se tiene punto de corte en:

$$150000 - A - 0.3111F = 0,$$

se despeja A ,

$$150000 - 0.3111F = A,$$

se sustituye en $400000 - F - 2.61029A = 0$ y se despeja F .

$$\begin{aligned} 400000 - F - 2.61029A &= 0 \\ 400000 - F - 2.61029(150000 - 0.3111F) &= 0 \\ 8456.5 &= 0.18794F \\ 45000 &= F. \end{aligned}$$

Ahora se reemplaza F , se obtiene,

$$\begin{aligned} 150000 - 0.3111F &= A \\ 150000 - 0.3111(45000) &= A \\ 136000 &= A. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A &= 136000, \\ F &= 45000. \end{aligned}$$

Al evaluar el determinante de la matriz jacobiana en los cuatro puntos críticos se observa:

I. Para el punto crítico $(0,0)$, en donde corresponde a un estado en el que ambas especies de ballenas mueren, se obtiene la matriz

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Se halla su determinante.

$$\begin{aligned} \det(g'(0,0)) &= (0.05)(0.08) - (0)(0) \\ &= 0.004, \end{aligned}$$

así,

$$\det(g'(0,0)) = 0.004.$$

El origen es un nodo inestable; en la vecindad del origen, todas las trayectorias son tangentes al eje “ y ”.

II. Para el punto crítico $(150000,0)$, en donde corresponde a un estado en el que una de las especies de ballenas sobrevive y la otra muere, se tienen la matriz

$$g'(150000,0) = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.015 \\ 0 & -0.00169 \end{pmatrix}.$$

Se halla el determinante

$$\begin{aligned}\det (g' (150000, 0)) &= (-0.05) (-0.00169) - (0) (-0.015) \\ &= -8.43 \times 10^{-5},\end{aligned}$$

así,

$$\det (g' (150000, 0)) = -0.0000843.$$

El punto $(150000, 0)$ es un punto de equilibrio del sistema, se observa que un par de trayectorias tienden al punto crítico " x ".

III. Para el punto crítico $(0, 400000)$, en donde corresponde a un estado en el que una de las especies de ballenas sobrevive y la otra muere, así la matriz es

$$g' (0, 400000) = \begin{pmatrix} 0.0085 & 0 \\ 0.208 & -0.08 \end{pmatrix}.$$

Se halla el determinante

$$\begin{aligned}\det (g' (0, 400000)) &= (0.0085) (-0.08) - (0.208) (0) \\ &= -6.81 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

así,

$$\det (g' (0, 400000)) = -0.000681.$$

El punto $(0, 400000)$ es un punto de equilibrio del sistema, se observa que un par de trayectorias tienden al punto crítico " y ".

IV. Para el punto crítico $(125000, 62500)$, corresponde a un estado en el que ambas especies de ballenas sobrevive, por tanto la matriz correspondiente es

$$g' (125000, 62500) = \begin{pmatrix} -0.0452 & -0.0141 \\ 0.0234 & -0.089 \end{pmatrix}.$$

Se halla el determinante

$$\begin{aligned}\det (g' (125000, 62500)) &= (-0.0452) (-0.0141) - (0.0234) (-0.089) \\ &= 7.38 \times 10^{-4},\end{aligned}$$

así,

$$\det (g' (125000, 62500)) = 0.000738.$$

El punto $(136000, 45000)$ es estable.

Para predecir el tamaño de la población de la Ballena Azul y la Ballena de Aleta, se uso el método de Runge Kutta Cuarto Orden, pero como es un método muy tedioso para solucionarlo manualmente se usó el software MATLAB, el cual ayuda a reducir los procesos matemáticos que se tienen que desarrollar.

Se obtiene que tanto la ballena azul como la ballena de aleta, no se extinguirán sino que su población aumentará de tal forma que las especies sobreviven.

Se observa en la gráfica las iteraciones respectivas de una predicción de cinco años.

```

MATLAB 7.10.0 (R2010a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
C:\Users\USER\Documents\MATLAB

Shortcuts How to Add What's New

SISTEMA DE 2 EDOs DESARROLLADO PARA EL MODELO COMPETENCIA DE ESPECIES
Ingrese el valor del tiempo inicial, t0:0
Ingrese el valor del tiempo final, tf:0.5
Ingrese el valor del paso h:0.01
Ingrese la cantidad de individuos depredadores al inicio, X(0):5000
Ingrese la cantidad de individuos presa al inicio, Y(0):70000
Resultados del cálculo con el metodo de Runge-Kutta 4° orden
columna 1: t columna 2: x(t) columna 3: y(x)

tab =

1.0e+004 *

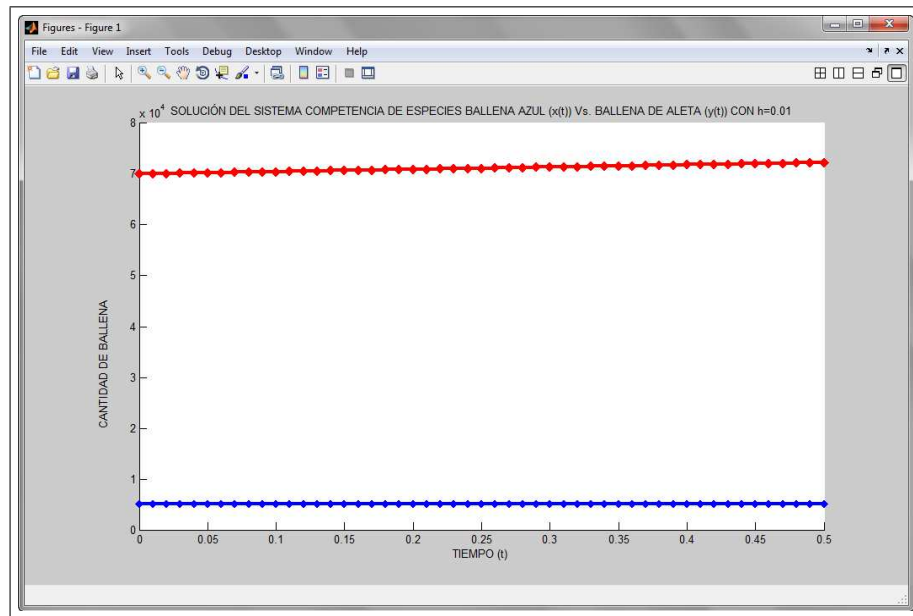
    0    0.5002    7.0045
    0.0000    0.5002    7.0045
    0.0000    0.5004    7.0089
    0.0000    0.5006    7.0134
    0.0000    0.5008    7.0178
    0.0000    0.5010    7.0223
    0.0000    0.5012    7.0268
    0.0000    0.5014    7.0312
    0.0000    0.5016    7.0357
    0.0000    0.5018    7.0402
    0.0000    0.5021    7.0447
    0.0000    0.5023    7.0491
    0.0000    0.5025    7.0536
    0.0000    0.5027    7.0581
    0.0000    0.5029    7.0626
    0.0000    0.5031    7.0671
    0.0000    0.5033    7.0716
    0.0000    0.5035    7.0760
    0.0000    0.5037    7.0805
    0.0000    0.5039    7.0850
  
```

```

MATLAB 7.10.0 (R2010a)
File Edit Debug Parallel Desktop Window Help
C:\Users\USER\Documents\MATLAB

Shortcuts How to Add What's New

0.0000    0.5039    7.0850
0.0000    0.5041    7.0895
0.0000    0.5043    7.0940
0.0000    0.5045    7.0985
0.0000    0.5047    7.1030
0.0000    0.5049    7.1075
0.0000    0.5051    7.1120
0.0000    0.5054    7.1165
0.0000    0.5056    7.1211
0.0000    0.5058    7.1256
0.0000    0.5060    7.1301
0.0000    0.5062    7.1346
0.0000    0.5064    7.1391
0.0000    0.5066    7.1437
0.0000    0.5068    7.1482
0.0000    0.5070    7.1527
0.0000    0.5072    7.1572
0.0000    0.5074    7.1618
0.0000    0.5076    7.1663
0.0000    0.5078    7.1708
0.0000    0.5080    7.1754
0.0000    0.5083    7.1799
0.0000    0.5085    7.1844
0.0000    0.5087    7.1890
0.0000    0.5089    7.1935
0.0000    0.5091    7.1981
0.0000    0.5093    7.2026
0.0000    0.5095    7.2072
0.0000    0.5097    7.2117
0.0000    0.5099    7.2163
0.0000    0.5101    7.2209
0.0001    0.5103    7.2254
  
```



En la gráfica anterior se observa que las especies no se extinguen, sino que aumentan su población de tal forma que sobreviven a futuro.

Capítulo 3

Conclusiones

- 1.** Los modelos de dinámicas de poblaciones de dos especies son simples comparadas con la complejidad de la naturaleza, pero son un pronóstico que se debería tener en cuenta.
- 2.** La interacción de dos especies que compiten por un suministro de alimento u otro recurso natural en común, conllevan a la permanencia o extinción de un ecosistema, sin interrumpir lo establecido por la naturaleza.
- 3.** La depredación tiene sentido físico, no solo porque las situaciones no se hacen negativas sino porque están definidas por un tiempo siempre que el depredador exista, así se lleve a la extinción tanto de la presa como del depredador.
- 4.** La interacción de la ballena azul y la ballena de aleta, permitió validar el modelo existente, con una predicción a futuro, donde ninguna de las dos especies se extinguirá.

Bibliografía

- [1] BORRELLI, Robert L. COLEMAN, Courtney S. (2002), *Ecuaciones diferenciales. Una perspectiva de modelación*. Primera edición. México, Oxford.
- [2] BOYCE, William E. DIPRIMA, Richard C. (2012), *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Quinta Edición. Mexico, Limusa Wiley.
- [3] CANO, Alfredo (2011), *Sistemas de Lotka-Volterra en dinámica poblacional*.
- [4] EDWARDS, Henry PENNEY, David E. (2009), *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cuarta Edición. México, Pearson Educación.
- [5] FERNÁNDEZ, Carlos VÁSQUEZ, Francisco J. VEGAS, José M. (2003), *Ecuaciones Diferenciales y en diferencias Sistemas Dinámicos*. España, Thomson.
- [6] LOMEN, David LOVELOCK, David (2000), *Ecuaciones diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. Primera Edición. México, Compañía Editorial Continental.
- [7] NAGLE, Kent. SAFF, Edward B. SNIDER, Atthur D. (2005), *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Cuarta Edición. México, Pearson Educación.
- [8] SIMONS, George F. ROBERTSON, John S. (1993), *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Segunda Edición. España, McGraw-Hill.

- [9] ZILL, Dennis G. CULLEN, Michael R. (2009), *Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores de frontera*. Séptima Edición. México, Cengage Learning.
- [10] ZILL, Dennis G. (2002), *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones de modelo*. Séptima Edición. Colombia, Thomson Learning.